ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ**

**Phạm Đình Nguyện**

# PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐỘNG LỰC HỌC PHI TUYẾN CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ CƠ KỸ THUẬT**

**Hà Nội – 2024**

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ**

**Phạm Đình Nguyện**

# PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐỘNG LỰC HỌC PHI TUYẾN CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC

Chuyên ngành: Cơ kỹ thuật
Mã số: 9520101.01

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ CƠ KỸ THUẬT**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:**
**GS. TSKH. Nguyễn Đình Đức**

**Hà Nội – 2024**

# LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của cán bộ hướng dẫn. Kết quả số liệu bảng và hình vẽ trình bày trong luận án hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với các nghiên cứu trước đây. Các dữ liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

*Hà Nội, ngày  tháng  năm 2024*

**NCS. Phạm Đình Nguyện**

# LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu sinh xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến thầy hướng dẫn GS. TSKH Nguyễn Đình Đức. Thầy đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, đồng hành và hỗ trợ nghiên cứu sinh hoàn thành các công trình nghiên cứu trong quá trình học tập.

Nghiên cứu sinh xin chân thành cảm ơn thầy cô trong Khoa Cơ học kỹ thuật và Tự động hóa, các thầy cô và cán bộ Phòng Đào tạo, Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN đã quan tâm, giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi cho nghiên cứu sinh trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Nghiên cứu sinh chân thành cảm ơn thầy cô, đồng nghiệp tại Phòng thí nghiệm Vật liệu và Kết cấu tiên tiến, Khoa Công nghệ Xây dựng - Giao thông, Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN đã luôn quan tâm, giúp đỡ và động viên nghiên cứu sinh.

Nghiên cứu sinh xin bày tỏ lòng biết ơn vì những giá trị được trao tặng qua các suất học bổng tới Trường Đại học Công nghệ, Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup-VINIF (mã số VINIF.2019.TS.44 và VINIF.2020.TS.17), Tổ chức Khoa học và Giáo dục Gặp gỡ Việt Nam, Tập đoàn Toshiba-Nhật Bản.

Nghiên cứu sinh bày tỏ lời cảm ơn tới gia đình, đồng nghiệp và bạn bè đã luôn động viên, chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ nghiên cứu sinh vượt qua khó khăn để hoàn thành các kết quả nghiên cứu trong luận án.

**NCS. Phạm Đình Nguyện**

# MỤC LỤC

**LỜI CẢM ƠN** . . . . . ii
**MỤC LỤC** . . . . . iii
**DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT** . . . . . vi
**DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ** . . . . . vii
**DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU** . . . . . x
**MỞ ĐẦU** . . . . . 1

**CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU** **5**
1.1 **Vật liệu composite và ống nano carbon** . . . . . 5
1.2 **Tổng quan phân tích tấm FG-CNTRC** . . . . . 8
1.3 **Tổng quan phân tích vỏ FG-CNTRC** . . . . . 11
1.4 **Kết luận chung và xác định vấn đề nghiên cứu** . . . . . 14

**CHƯƠNG 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT** **17**
2.1 **Các lý thuyết cơ bản** . . . . . 17
2.1.1 Lý thuyết tấm cổ điển . . . . . 18
2.1.2 Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất . . . . . 19
2.1.3 Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba . . . . . 20
2.1.4 Lý thuyết biến dạng cắt hình sin . . . . . 22
2.1.5 Trường biến dạng phi tuyến Von-Kármán . . . . . 23
2.2 **Các nguyên lý cơ bản** . . . . . 26
2.2.1 Nguyên lý công ảo . . . . . 26
2.2.2 Nguyên lý Hamilton . . . . . 27
2.2.3 Phương pháp Galerkin . . . . . 27
2.2.4 Phương pháp Runge-Kutta . . . . . 29
2.3 **Các khái niệm cơ bản** . . . . . 31

2.3.1 Phân tích mất ổn định . . . . . 31
2.3.2 Tần số riêng và dao động tự do . . . . . 33
2.3.3 Phân tích đáp ứng động lực học . . . . . 34
2.4 **Các mô hình đồng nhất hoá FG-CNTRC** . . . . . 35
2.4.1 Các phương pháp xác định tính chất cơ học của vật liệu composite . . . . . 35
2.4.2 Mô hình Halpin-Tsai . . . . . 36
2.4.3 Mô hình vật liệu của Shen . . . . . 38
2.5 **Kết luận chương 2** . . . . . 40

**CHƯƠNG 3. PHÂN TÍCH MẤT ỔN ĐỊNH CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC 41**
3.1 **Phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC** . . . . . 41
3.1.1 Các phương trình cơ bản của tấm FG-CNTRC . . . . . 42
3.1.2 Phương pháp bán giải tích . . . . . 48
3.1.3 Phương pháp mô phỏng . . . . . 51
3.1.4 Kết quả và thảo luận . . . . . 54
3.2 **Phân tích mất ổn định của vỏ nón cụt FG-CNTRC** . . . . 65
3.2.1 Phương trình phân tích mất ổn định của vỏ nón cụt . . . . 66
3.2.2 Kết quả và thảo luận . . . . . 72
3.3 **Kết luận chương 3** . . . . . 78

**CHƯƠNG 4. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC 80**
4.1 **Phân tích dao động và đáp ứng động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC** . . . . . 80
4.1.1 Các phương trình cơ bản của vỏ hai độ cong FG-CNTRC . 81
4.1.2 Các điều kiện biên và nghiệm phương trình . . . . . 89
4.1.3 Phương trình phân tích động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC . . . . . 93

4.1.4 Kết quả và thảo luận . . . . . 96
4.2 **Phân tích dao động tự do và đáp ứng động lực học của vỏ nón cụt FG-CNTRC** . . . . . 115
4.2.1 Phương trình phân tích động lực học . . . . . 116
4.2.2 Kết quả và thảo luận . . . . . 119
4.3 **Kết luận chương 4** . . . . . 128

**KẾT LUẬN** **130**

**DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN** **132**

**TÀI LIỆU THAM KHẢO** **135**

**PHỤ LỤC** **P1**

**PHỤ LỤC A.** **P1**
A.1 . . . . . P1
A.2 . . . . . P4
A.3 . . . . . P9

# DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

| **Chữ viết tắt** | **Tiếng Anh** | **Tiếng Việt** |
|---|---|---|
| CPT | Classical Plate Theory | Lý thuyết tấm cổ điển |
| FSDT | First-Order Shear Deformation Theory | Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất |
| HSDT | Higher-Order Shear Deformation Theory | Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao |
| TSDT | Third-Order Shear Deformation Theory | Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba |
| FG-CNT | Functionally Graded - Carbon Nanotube | Ống nano carbon có cơ tính biến thiên |
| FG-CNTRC | Functionally Graded reinforced composite | Composite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên |
| UD | Uniform Distribution | Phân bố đều |
| SWCNTs | Single-Walled Carbon Nanotubes | Các ống nano carbon đơn vách |
| BC | Boundary Condition | Điều kiện biên |
| SSSS | Fully Simply Supported | Tựa đơn các cạnh |
| CCCC | Fully Clamped | Ngàm các cạnh |
| CSCS | Clamped and Simply Supported | Ngàm và tựa đơn đối diện |
| FEM | Finite Element Method | Phương pháp phần tử hữu hạn |

# DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1.1 Cấu trúc ống nano carbon . . . . . 6

Hình 2.1 Mặt cắt trước và sau biến dạng của tấm theo lý thuyết CPT 18
Hình 2.2 Mặt cắt trước và sau biến dạng của tấm theo lý thuyết FSDT 19
Hình 2.3 Mặt cắt trước và sau biến dạng của tấm theo lý thuyết TSDT 20
Hình 2.4 Biến dạng của phần tử theo trục $x$ . . . . . 23
Hình 2.5 Mặt cắt tính biến dạng cắt . . . . . 24
Hình 2.6 Mô tả phương pháp Runge-Kutta bậc 4 . . . . . 31
Hình 2.7 Đường cong tải trọng-chuyển vị của kết cấu chịu nén . . . . 32
Hình 2.8 Các phương pháp xác định tính chất vật liệu [28] . . . . . 35
Hình 2.9 Sự phân bố CNT qua chiều dày kết cấu (a) Phân bố đều (UD), (b) Tỉ lệ thể tích CNT lớn nhất ở mặt ngoài (FG-X), (c) Tỉ lệ thể tích CNT lớn nhất ở mặt giữa (FG-O) . . . . . 40

Hình 3.1 Mô hình tấm FG-CNTRC . . . . . 42
Hình 3.2 Mặt cắt tấm composite nhiều lớp với hai mô hình phân bố CNT . . . . . 51
Hình 3.3 Mô hình phần tử hữu hạn của tấm . . . . . 52
Hình 3.4 Điều kiện biên của tấm . . . . . 53
Hình 3.5 Mô hình phân bố của các loại tải trọng . . . . . 53
Hình 3.6 Sáu mode mất ổn định đầu tiên của tấm FG-CNTRC theo mô hình I (Giải tích) . . . . . 57
Hình 3.7 Mode mất ổn định của tấm FG-X nhiều lớp với điều kiện biên khác nhau theo Mô hình II (FEM) . . . . . 60

Hình 3.8 Ảnh hưởng tỉ lệ thể tích CNT tới đường cong tải trọng ($Fx$)-tỉ lệ độ võng/chiều dày ($W/h$) của tấm nanocomposite với nền PMMA . . . . . 62
Hình 3.9 Ảnh hưởng tỉ lệ thể tích CNT tới đường cong tải trọng ($Fx$)-tỉ lệ độ võng/chiều dày ($W/h$) của tấm nanocomposite với nền PmPV . . . . . 62
Hình 3.10 Ảnh hưởng của loại phân bố CNT tới đường cong tải trọng ($Fx$)-tỉ lệ độ võng/chiều dày ($W/h$) của tấm nanocomposite với nền PMMA . . . . . 63
Hình 3.11 Ảnh hưởng của loại phân bố CNT tới đường cong tải trọng ($Fx$)-tỉ lệ độ võng/chiều dày ($W/h$) của tấm nanocomposite với nền PmPV . . . . . 63
Hình 3.12 So sánh hai loại tải trọng ảnh hưởng tới đường cong tải trọng ($Fx$)-tỉ lệ độ võng/chiều dày ($W/h$) của tấm nanocomposite với nền PMMA . . . . . 64
Hình 3.13 Ảnh hưởng tỉ lệ $a/b$ tới đường cong tải trọng ($Fx$)-tỉ lệ độ võng/chiều dày ($W/h$) của tấm nanocomposite với nền PmPV . . 65
Hình 3.14 Mô hình vỏ nón cụt trên nền đàn hồi . . . . . 66
Hình 3.15 Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-X . . . . . 73
Hình 3.16 Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt UD . . . . . 73
Hình 3.17 Ảnh hưởng của góc bán đỉnh và tỉ lệ $L/R_1$ tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 74
Hình 3.18 Ảnh hưởng của tỉ lệ $R_1/h$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-X . . . . . 75
Hình 3.19 Ảnh hưởng của tỉ lệ $R_1/h$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt có CNT phân bố đều . . . . . 76

Hình 3.20 Ảnh hưởng của tỉ lệ $L/R_1$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 77
Hình 3.21 Ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 77
Hình 3.22 Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-CNTRC dặt trên nền đàn hồi . . . . . 78

Hình 4.1 Mô hình vỏ hai độ cong . . . . . 81
Hình 4.2 So sánh đường cong $A_w/h$-$\Omega/\omega_{mn}$ của tấm FG-CNTRC . . . 99
Hình 4.3 Ảnh hưởng của các loại phân bố CNT tới đường cong biên độ tần số của dao động tự do phi tuyến cho vỏ hai độ cong nền kim loại (Model I-b) . . . . . 107
Hình 4.4 So sánh đường cong biên độ-tần số của tấm, panel trụ, và vỏ hai độ cong (Model I-b) . . . . . 107
Hình 4.5 Ảnh hưởng của biên độ lực ngoài tới đường cong biên độ tần số của dao động phi tuyến cho vỏ hai độ cong và tấm FG-X CNT gia cường nền gốm (Model I-a) . . . . . 108
Hình 4.6 Ảnh hưởng của biên độ lực ngoài tới đường cong biên độ tần số của dao động phi tuyến cho vỏ hai độ cong FGM với CNT phân bố đều(Model II) . . . . . 109
Hình 4.7 Ảnh hưởng của các loại nền khác nhau tới đường cong biên độ-thời gian của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường CNT với điều kiện biên SSSS (Model II) . . . . . 110
Hình 4.8 Ảnh hưởng của các loại nền khác nhau tới đường cong biên độ-thời gian của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường CNT với điều kiện biên CCCC (Model II) . . . . . 111
Hình 4.9 Ảnh hưởng của các loại phân bố CNT tới đáp ứng động lực học phi tuyến cho vỏ hai độ cong nền kim loại với điều kiện biên SSSS . . . . . 112

Hình 4.10 Ảnh hưởng của các loại phân bố CNT tới đáp ứng động lực học phi tuyến cho vỏ hai độ cong nền kim loại với điều kiện biên CCCC . . . . . 112
Hình 4.11 Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II) . . . . . 113
Hình 4.12 Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II) . . . . . 113
Hình 4.13 Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II) . . . . . 114
Hình 4.14 So sánh đường cong biên độ độ võng-thời gian cho tấm, panel trụ, và vỏ hai độ cong nền FGM (Model II) . . . . . 115
Hình 4.15 Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới đường cong biên độ độ võng và thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 125
Hình 4.16 Ảnh hưởng của loại phân bố CNT tới đường cong biên độ độ võng và thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 125
Hình 4.17 Ảnh hưởng của hệ số gia nhiệt $\Delta T$ tới đường cong biên độ độ võng-thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 126
Hình 4.18 Ảnh hưởng của mô hình nền đàn hồi tới đường cong biên độ độ võng-thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 126
Hình 4.19 Ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ tới đường cong biên độ độ võng và thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 127

# DANH MỤC CÁC BẢNG BIỂU

Bảng 2.1 Tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ . . . . . 37
Bảng 2.2 Tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ của (10, 10) SWCNTs 38
Bảng 2.3 Tính chất vật liệu nền phụ thuộc nhiệt độ . . . . . 39
Bảng 2.4 Hệ số hiệu chỉnh cho kết cấu composite gia cường ống nano carbon . . . . . 39

Bảng 3.1 Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm đơn lớp SSSS gia cường FG-CNT . . . . . 54
Bảng 3.2 Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp SSSS gia cường FG-CNT chịu tải parabol ($V^*_{CNT} = 0.28, b/h = 10, a = b$) . . . . . 55
Bảng 3.3 Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp SSSS gia cường FG-CNT chịu tải parabol và tải tuần hoàn ($V^*_{CNT} = 0.17, b/h = 10, a = b$) . . . . . 55
Bảng 3.4 So sánh 2 mô hình cho hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm SSSS FG-CNTRC chịu tải nén parabol 2 cạnh . . . . . 56
Bảng 3.5 So sánh 2 mô hình cho hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm SSSS FG-CNTRC chịu tải nén parabol 2 cạnh . . . . . 56
Bảng 3.6 Ảnh hưởng tỉ lệ thể tích và loại phân bố CNT tới hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp theo Mô hình II (FEM) . . . 58
Bảng 3.7 Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm UD-CNT nhiều lớp 4 cạnh tựa đơn chịu tải nén 2 và 4 cạnh theo Mô hình II (FEM) . . 59
Bảng 3.8 Ảnh hưởng điều kiện biên tới hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp chịu tải parabol theo Mô hình II (FEM) . . . . . 61
Bảng 3.9 Ảnh hưởng của tỉ lệ phân bố và loại phân bố CNT tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 74

Bảng 4.1 Tần số cơ bản không thứ nguyên của tấm FGM với điều kiện biên SSSS và CCCC . . . . . 97
Bảng 4.2 Tần số cơ bản không thứ nguyên $\varpi = \omega_0 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ của panel trụ $(m,n) = (1,1), a = b = 1, b/h = 5, b/R_y = 0$ . . . . . 97
Bảng 4.3 So sánh tần số cơ bản không thứ nguyên $\varpi = \omega_0 h\sqrt{\rho_c/E_c}$của vỏ hai độ cong FGM $(m,n) = (1,1), a = b = 1, b/h = 10$. . . . . 98
Bảng 4.4 So sánh tần số cơ bản của tấm gia cường FG-CNTs đặt trên nền đàn hồi $(m,n) = (1,1), a/h = 15, N_L = 5, a/b = 1, W_{CNT} = 0.1\,(\%), a/R_x = 0, b/R_y = 0$ . . . . . 98
Bảng 4.5 Sự hội tụ của tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ kim loại hai độ cong gia cường ống CNTs . . . . . 100
Bảng 4.6 Sự hội tụ của tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ gốm hai độ cong gia cường ống CNTs . . . . . 100
Bảng 4.7 Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ gốm hai độ cong (Model I-a) . . . . . 101
Bảng 4.8 Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ kim loại hai độ cong (Model I-b) . . . . . 102
Bảng 4.9 Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tần số cơ bản $\omega_0\,(\mathrm{rad/s})$ của vỏ hai độ cong CNTs-FGDCS (Model II) . . . . . 103
Bảng 4.10 Ảnh hưởng điều kiện biên BCs và các loại phân bố CNTs tới tần số không thứ nguyên của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNTs (Model I-b: $W_{CNT} = 1\,(\%)$) . . . . . 103
Bảng 4.11 Ảnh hưởng sự phân bố CNTs và tỉ lệ chiều dài trên bán kính đến tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNT trên nền đàn hồi (Mô hình I-b: $W_{CNT} = 1\,(\%), K_1 = 2\,GPa/m, K_2 = 0.1\,GPa.m$) . . . . . 104
Bảng 4.12 Ảnh hưởng các loại nền và tỉ lệ chiều dài trên bán kính đến tần số cơ bản của vỏ hai độ cong gia cường UD-CNT (Mô hình II: $W_{CNT} = 1\%$) . . . . . 104

Bảng 4.13 Ảnh hưởng $\Delta T$ và tỉ lệ $a/h$ tới tần số cơ bản $\omega_0$ (rad/s) của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II: $W_{CNT} = 1\%$) . . . . . 105
Bảng 4.14 So sánh hai công thức tần số cơ bản cho vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNT (Model I-b) . . . . . 106
Bảng 4.15 So sánh tần số tự nhiên không thứ nguyên của vỏ nón cụt đồng nhất ($m = 1$) . . . . . 120
Bảng 4.16 So sánh tần số riêng không thứ nguyên $\Omega = \omega_L \left(R_1^2/h\right) \sqrt{\rho_m/E_m}$của vỏ nón cụt FG-CNTRC $\left(L/R_1 = 2, R_1/h = 20, \gamma = 30^o\right)$ . . . . . 120
Bảng 4.17 So sánh tần số riêng không thứ nguyên $\Omega = \omega_L(R_1^2/h)\sqrt{\rho_m/E_m}$ của vỏ nón cụt FG-CNTRC ($h = 0.002m, R_1/h = 25, \gamma = 15^\circ$) . . . . 121
Bảng 4.18 Ảnh hưởng tỉ lệ CNT tới tần số riêng $\omega_L(rad/s)$ của vỏ nón cụt $\gamma = 30^o$, $L/R_1 = 2, \Delta T = 0$ . . . . . 122
Bảng 4.19 Ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ lên tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC . . . . . 122
Bảng 4.20 Ảnh hưởng tỉ lệ $L/R_1$ tới tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC $R_1/h = 80$, $\gamma = 30, \Delta T = 0, (K_w\,, K_p) = (0, 0)$ . . . . . 123
Bảng 4.21 Ảnh hưởng hệ số gia nhiệt $\Delta T$ và tỉ lệ $R_1/h$ tới tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC ($UD, \gamma = 30^o$, $L/R_1 = 2, K_w = 0, K_p = 0$)123

# MỞ ĐẦU

## Tính cấp thiết của đề tài

Hiện nay, với sự phát triển mạnh mẽ của khoa học kỹ thuật, việc sử dụng vật liệu có tính chất cơ học ưu việt thay thế cho các vật liệu truyền thống là yêu cầu tất yếu nhằm mục đích nâng cao hiệu suất làm việc của các kết cấu. Vật liệu composite được gia cường ống nano carbon (CNT) có cơ tính biến đổi, đang trở thành một hướng nghiên cứu mới trong lĩnh vực cơ học với mục tiêu là tận dụng ưu điểm về độ bền, độ cứng cao, tính dẫn điện tốt của các ống CNT để tạo ra loại vật liệu nanocomposite có khả năng làm việc trong môi trường khắc nghiệt, đặc biệt quan trọng trong các ngành công nghiệp như hàng không, công nghiệp đóng tàu, kỹ thuật xây dựng, hạ tầng...

Trong kỹ thuật, tấm và vỏ là các cấu kiện cơ bản đóng vai trò quan trọng trong các kết cấu chịu tải, đặc biệt trong lĩnh vực cơ học vật liệu và kết cấu. Những kết cấu này thường phải hoạt động trong môi trường khắc nhiệt vì vậy việc nâng cao hiệu suất và thời gian làm việc của chúng là một bài toán quan trọng. Thay đổi thành phần vật liệu để tăng độ bền và độ cứng là một phương pháp hiệu quả để cải thiện khả năng làm việc của kết cấu.

Xuất phát từ những yêu cầu cấp thiết nhằm hiểu về ứng xử cơ học của các kết cấu gia cường ống nano carbon, luận án này tập trung vào bài toán ***"Phân tích tĩnh và động lực học phi tuyến của tấm và vỏ FG-CNTRC"***. Bằng cách sử dụng nguyên lý cơ bản để thiết lập phương trình cân bằng và chuyển động áp dụng cho phân tích mất ổn định, dao động tự do, và đáp ứng động lực học của các kết cấu tấm và vỏ gia cường bằng ống CNT có cơ tính biến đổi.

**Mục tiêu nghiên cứu của luận án**

- Xây dựng phương trình cân bằng và chuyển động dựa trên nguyên lý công ảo, Hamilton sử dụng các lý thuyết biến dạng cắt của Reddy và lý thuyết biến dạng cắt hình sin cho tấm và vỏ FG-CNTRC.
- *Bài toán tĩnh:* Phân tích mất ổn định của tấm, vỏ FG-CNTRC sử dụng phương pháp bán giải tích và mô phỏng số nhằm xác định tải tới hạn và mối liên hệ tải trọng - độ võng sau tới hạn.
- *Bài toán động:* Phân tích động lực học phi tuyến của tấm, vỏ FG-CNTRC nhằm xác định tần số riêng, mối liên hệ biên độ độ võng - tần số, mối liên hệ độ võng-thời gian.

**Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

*Đối tượng nghiên cứu:* Đối tượng nghiên cứu của luận án là tấm chữ nhật, vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC.

*Phạm vi nghiên cứu:* Bài toán tĩnh: Phân tích mất ổn định và sau mất ổn định. Bài toán động: Phân tích đáp ứng động lực học và dao động.

**Phương pháp nghiên cứu**

Để thực hiện mục tiêu đề ra, luận án đã chọn phương pháp giải tích đi từ các nguyên lý cơ bản để xây dựng phương trình và áp dụng các phương pháp số để giải các phương trình cơ bản. Cụ thể:

- *Phương pháp giải tích:* Sử dụng các lý thuyết tấm vỏ (lý thuyết biến dạng cắt bậc 3, lý thuyết biến dạng cắt hình sin) xác định các chuyển vị. Sau đó, thiết lập trường biến dạng Von-Kármán biểu thị mối quan hệ phi tuyến giữa biến dạng và chuyển vị. Sử dụng nguyên lý công ảo hoặc nguyên lý Hamilton để xây dựng phương trình cân bằng hoặc chuyển động ở dạng đạo hàm riêng theo tọa độ và thời gian.

- *Phương pháp bán giải tích:* Sử dụng phương pháp hàm ứng suất Airy và phương pháp Galerkin để giải phương trình đạo hàm riêng với việc lựa chọn nghiệm của chuyển vị và hàm ứng suất thỏa mãn điều kiện biên. Đối với bài toán tĩnh, kết quả thu được là phương trình đại số biểu thị mối quan hệ giữa lực và chuyển vị để phân tích mất ổn định của tấm vỏ FG-CNTRC. Đối với bài toán động, kết quả thu được là phương trình vi phân của chuyển vị theo thời gian được sử dụng để xác định tần số riêng trong phân tích dao động tự dao và áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để thu được mối quan hệ giữa biên độ độ võng theo thời gian trong phân tích đáp ứng động lực học.

- *Phương pháp mô phỏng:* Xây dựng mô hình phần tử hữu hạn 3D trong phần mềm ABAQUS với chương trình con USDFLD viết trên FORTRAN để mô phỏng sự phân bố của các ống nano carbon có cơ tính biến đổi theo chiều dày áp dụng cho phân tích mất ổn định.

**Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án**

*Ý nghĩa khoa học*: Hiện nay, nghiên cứu trong và ngoài nước liên quan tới bài toán mất ổn định, dao động riêng, và đáp ứng động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC sử dụng phương pháp giải tích, bán giải tích kết hợp với phương pháp mô phỏng số còn hạn chế. Luận án này trình bày một cách có hệ thống từ việc áp dụng, cải thiện các lý thuyết biến dạng cắt nhằm xác định chuyển vị, trường biến dạng phi tuyến Von-Kármán, xây dựng phương trình cân bằng, chuyển động ở dạng đạo hàm riêng của tọa độ và thời gian cho tới việc áp dụng phương pháp mô phỏng số, phương pháp Galerkin, phương pháp Runge-Kutta nhằm xác định tải trọng tới hạn, mối liên hệ tải trọng-độ võng và chuyển vị-thời gian trong phân tích mất ổn định và động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC.

*Ý nghĩa thực tiễn*: Cung cấp các kết quả về giá trị tải tới hạn, biểu thức tải trọng và độ võng, tần số riêng, biên độ độ võng và thời gian để hiểu rõ cách các

kết cấu FG-CNTRC phản ứng dưới tác động của tải trọng tĩnh và động trong điều kiện thực tế. Điều này đóng góp vào việc cung cấp các giải pháp hỗ trợ trong quá trình thiết kế và chẩn đoán không phá hủy cũng như nâng cao hiệu suất của các kết cấu composite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

**Bố cục của luận án**

Nội dung chính của luận án được trình bày trong bốn chương và các phần mở đầu, kết luận và hướng phát triển của luận án, các công trình khoa học đã công bố, tài liệu tham khảo và phụ lục. Nội dung tóm tắt của các phần như sau:

**Mở đầu:** Trình bày các vấn đề chung của luận án, ý nghĩa khoa học và thực tiễn, tóm tắt nội dung nghiên cứu và bố cục của luận án.

**Chương 1:** Trình bày tổng quan các nội dung nghiên cứu về phân tích tĩnh và động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC.

**Chương 2:** Trình bày tóm tắt các lý thuyết tấm vỏ, nguyên lý cơ bản xây dựng phương trình cân bằng và chuyển động, phương pháp giải bài toán, các khái niệm cơ bản, các mô hình vật liệu sử dụng trong luận án.

**Chương 3:** Trình bày phân tích mất ổn định của tấm và vỏ FG-CNTRC nhằm xác định tải trọng tới hạn, biểu thức tải trọng-độ võng sau tới hạn.

**Chương 4:** Trình bày kết quả phân tích động lực học xác định tần số dao động, mối quan hệ chuyển vị-thời gian, biên độ-tần số của vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC.

**Kết luận và hướng phát triển của luận án**.

**Tài liệu tham khảo**

**Phụ lục**

# CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU

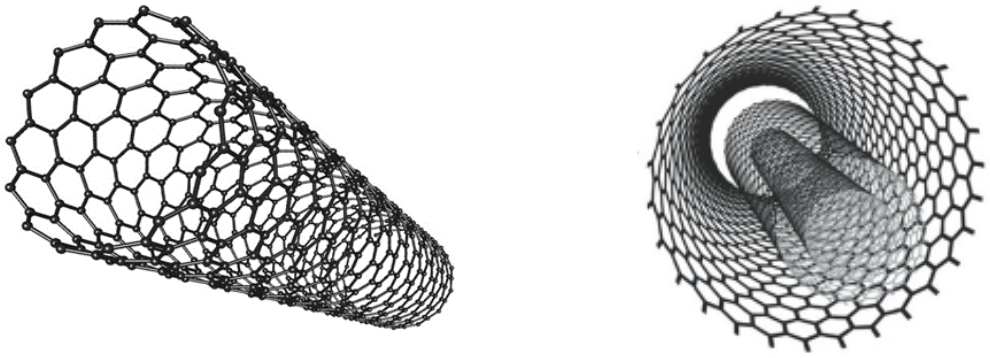
## 1.1. Vật liệu composite và ống nano carbon

Vật liệu composite là sự kết hợp giữa hai hoặc nhiều loại vật liệu có tính chất khác nhau, tận dụng những đặc tính riêng biệt của từng vật liệu thành phần. Việc tổ hợp chúng tạo ra một vật liệu mới với những đặc tính ưu việt hơn so với các thành phần ban đầu. Composite bao gồm vật liệu nền và vật liệu gia cố, trong đó vật liệu nền đảm bảo sự liên kết giữa các vật liệu gia cố, duy trì tính nguyên khối và liên tục của cấu trúc. Vật liệu nền ảnh hưởng đến khả năng chịu nhiệt, bền hóa và khả năng chịu tải của kết cấu composite, thường được chọn từ polyme, gốm, kim loại hoặc carbon. Vật liệu gia cố đảm bảo kết cấu composite có độ cứng và độ bền cao, thường được sử dụng dưới dạng bột, hạt, sợi, v.v

Cơ tính của vật liệu composite chủ yếu phụ thuộc vào một số yếu tố quan trọng bao gồm: cơ tính của vật liệu thành phần, luật phân bố hình học của vật liệu gia cố, tương tác giữa các vật liệu thành phần, và đặc điểm của mặt tiếp xúc giữa vật liệu gia cố và vật liệu nền. Các cơ tính này góp phần quan trọng để mô tả một vật liệu composite. Đặc trưng hình học của vật liệu gia cố được xác định bởi các yếu tố như hình dáng, kích thước, mật độ, và mô hình phân bố. Trong các yếu tố này, mật độ của vật liệu gia cố thường được đo lường thông qua tỉ lệ thể tích hoặc tỉ lệ khối lượng là yếu tố quan trọng quyết định đến tính chất cơ học của vật liệu composite [8, 9].

Ống nano carbon là một dạng thù hình của carbon, xuất phát từ những phân tử carbon với những đặc tính nổi bật như độ bền và độ cứng, khả năng dẫn điện và dẫn nhiệt hiệu quả. Ống nano carbon lần đầu tiên được phát hiện vào năm 1991 tại Nhật Bản do Tiến sĩ Sumio Iijima một nghiên cứu viên của công

ty NEC tình cờ phát hiện qua kính hiển vi điện tử [50]. Từ sự khám phá này, nghiên cứu về ống nano carbon đã phát triển mạnh mẽ trong cả lĩnh vực nghiên cứu cơ bản và ứng dụng. Do đó, CNT đặt ra như một vật liệu có cơ tính vượt trội so với nhiều vật liệu truyền thống đã biết trước đó [6]. Tùy vào điều kiện chế tạo và vật liệu gốc có thể chia thành hai loại CNT là ống nano carbon đơn vách (SWCNT) và đa vách (MWCNT) (Hình 1.1).



*(a). SWCNT* *(b). MWCNT*

***Hình 1.1:*** *Cấu trúc ống nano carbon*

Các đặc tính cơ học ưu việt của các ống nano carbon giúp nâng cao tính chất của vật liệu composite nền kim loại, gốm hoặc polyme. Sự kết hợp CNT vào các vật liệu này giúp cải thiện độ bền, độ cứng, độ dẻo dai, khả năng chống mài mòn, độ dẫn điện, độ dẫn nhiệt và tản nhiệt của vật liệu composite. Điều này giúp cho vật liệu composite gia cố CNT phù hợp với nhiều ứng dụng trong hàng không vũ trụ, ô tô, năng lượng và kỹ thuật cơ khí, xây dựng công trình. Nghiên cứu [18] chỉ ra rằng ống nano carbon có độ bền cao 200GPa, đồng thời nhẹ và có module Young là 1TPa. Tác giả Deng và các cộng sự [35] kết luận rằng khả năng chịu tải của kết cấu composite gia cường CNT có độ bền và độ cứng cao dưới ảnh hưởng của nhiệt độ. Tác giả Fernanda và Daniel [42] trình bày kết quả thí nghiệm về đáp ứng động lực học của tấm nhôm sandwich gia cường CNT và chỉ ra rằng tải trọng phá hủy được nâng lên với các mẫu thí nghiệm có chứa CNT. Tác giả Wang và cộng sự [116] chỉ ra rằng kết cấu composite nền nhôm

gia cường CNT có cường độ và module đàn hồi lần lượt là 6.6GPa và 500GPa, nhờ sự có mặt của CNT dẫn tới độ bền và độ cứng tăng lên nhưng vẫn đảm bảo độ dẫn điện cao. Sử dụng phương pháp mô phỏng động học phần tử (molecular dynamics simulation - MD) xác định tính chất vật liệu của composite gia cường CNT, tác giả Snehanshu và cộng sự [80] chỉ ra sự gia cố của CNT vào các mẫu nền nhôm làm tăng cường độ, cụ thể là mẫu nền nhôm gia cường CNT (30,30). Ngoài ra, nhiều nghiên cứu đã chỉ ra sự có mặt của CNT trong nền kim loại giúp tăng độ bền và độ cứng cũng như là tải trọng phá hủy [15, 24–26, 119, 128].

Khái niệm vật liệu có cơ tính biến đổi lần đầu tiên được đưa ra vào năm 1984 từ các nhà khoa học Nhật Bản [61], được biết đến là loại vật liệu gồm 2 thành phần gồm và kim loại được phân bố theo hàm biến đổi tuyến tính theo chiều dày của kết cấu nhằm tận dụng tối đa tính chất vật liệu thành phần. Tác giả Shen [92] là người đầu tiên đề xuất khái niệm vật liệu composite gia cường các ống nano carbon có cơ tính biến đổi nhằm nâng cao tính chất của vật liệu composite so với trường hợp các ống CNT phân bố đều. Từ đó, vật liệu composite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến đổi đã thu hút được nhiều nhà khoa học nghiên cứu. Để xác định các module đàn hồi của kết cấu này nhiều phương pháp đã được sử dụng gồm phương pháp động học phần tử (MD), Mô hình Mori-Tanaka, và Halpin-Tsai. Tác giả Shen [92] sử dụng phương pháp MD để xác định tính chất vật liệu FG-CNT. Tiếp theo đó, Shen và Zhu [97] đã phát triển cho bài toán phân tích mất ổn định của tấm trong môi trường nhiệt độ. Sau đó, có nhiều nghiên cứu dựa trên công thức của tác giả Shen để tiến hành phân tích bài toán động lực học của kết cấu composite gia cường FG-CNT [16, 72]. Hơn nữa, mô hình Halpin-Tsai cũng được sử dụng rộng rãi trong xác định tính chất vật liệu của kết cấu composite gia cường FG-CNT [54, 62, 103]. Mô hình Mori-Tanaka cũng được áp dụng trong các nghiên cứu [68, 98, 123].

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) và vật liệu composite gia cường các ống nano carbon có cơ tính biến thiên (FG-CNTRC) là loại vật liệu có thành phần và tính chất thay đổi theo chiều dày của kết cấu. FGM và FG-CNT là những

vật liệu được thiết kế để có các đặc tính cụ thể thay đổi dần dần theo một tỉ lệ thể tích nhất định, nhằm mang lại hiệu suất vượt trội so với các vật liệu thành phần truyền thống. Vật liệu composite gia cường CNT trở nên phổ biến trong những năm gần đây do các đặc tính cơ học đặc biệt. Tìm hiểu các tính chất cơ học và ứng xử của các kết cấu FGM và FG-CNT đã trở thành một lĩnh vực nghiên cứu quan trọng trong khoa học và kỹ thuật vật liệu.

## 1.2. Tổng quan phân tích tấm FG-CNTRC

Tấm là cấu kiện cơ bản có ứng dụng rộng rãi trong nhiều kết cấu kỹ thuật, thành phần quan trọng của các sản phẩm trong nhiều ngành công nghiệp như xây dựng, kiến trúc, hàng không. Để tránh việc hư hỏng của các kết cấu, việc phân tích tính chất cơ học của kết cấu là bài toán đặc biệt quan trọng nhằm đánh giá về khả năng làm việc của kết cấu. Tác giả Shen [92] là người đầu tiên đề xuất khái niệm vật liệu composite gia cường các ống nano carbon có cơ tính biến đổi và áp dụng cho phân tích tấm FG-CNTRC chịu uốn dựa trên lý thuyết biến dạng cắt của Reddy và trường biến dạng Von-Kármán. Sau đề xuất này, đã có nhiều nghiên cứu phân tích ổn định, mất ổn định, sau mất ổn định, dao động tự do, và đáp ứng động lực học để hiểu về ứng xử của kết cấu tấm composite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến đổi.

Đối với phân tích uốn, dựa trên cách tiếp cận số bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả Zhu và cộng sự [127] đã phân tích tấm FG-CNTRC chịu uốn dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT). Tác giả Zhang và cộng sự [126] đã áp dụng phương pháp IMLS-Ritz với phần tử tự do sử dụng các nút phân tán thay cho việc chia lưới. Tác giả Phungvan và cộng sự [81] đề xuất sử dụng các phần tử đẳng hình học dựa trên phương pháp các hàm cơ bản B-Spline (Nonuniform Rational B-Spline) kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) để phân tích ứng xử của tấm FG-CNTRC. Tác giả Sobhy [99] đề xuất một hàm dạng mới cho phân tích uốn của tấm chữ nhật FG-CNTRC đặt

trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt độ sử dụng lý thuyết HSDT. Cũng giải quyết bài toán này, tác giả Soni và cộng sự [102] đã áp dụng lý thuyết biến dạng cắt hình hyperbol. Tác giả Keleshteri và cộng sự [53] phân tích tấm hình khuyên FG-CNTRC sử dụng phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (generalized differential quadrature method). Tác giả Natarajan và cộng sự [77] đã trình bày kết quả phân tích uốn của tấm sandwich với mặt ngoài làm bằng vật liệu FG-CNT sử dụng phần tử QUAD-8 mô tả sự biến đổi thực thế của chuyển vị dọc theo chiều dày. Tác giả Chavan và Lal [29] đã đề xuất phần tử đẳng hình học 9 nút với 7 bậc tự do cho mỗi nút áp dụng cho phân tích uốn của tấm nhiều lớp gia cường ống nano carbon. Tác giả Shen và cộng sự [94] trình bày kết quả nghiên cứu ứng xử uốn phi tuyến của tấm FG-CNTRC có hệ số Poisson âm. Tác giả Sciuva và Sorrenti [70] đề xuất áp dụng lý thuyết Zigzag giản lược mở rộng (extended Refined Zigzag Theory - eRZT) kết hợp với phương pháp Ritz cho phân tích uốn của tấm FG-CNTRC và kết luận rằng lý thuyết eRZT mô tả quan hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng cắt chính xác hơn lý thuyết FSDT và TSDT cho tấm FG-CNTRC.

Phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC thu hút nhiều học giả nghiên cứu, sử dụng phương pháp bán giải tích dựa trên lý thuyết cổ điển và phương pháp Galerkin, tác giả Wang [117] đã phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau. Tác giả Shen và Zhang [96] áp dụng phương pháp nhiễu hai bước (two-step perturbation technique) cho phân tích mất ổn định và sau mất ổn định của tấm chịu tải nhiệt parabol với điều kiện biên tựa đơn các cạnh. Cũng phân tích bài toán này, Torabi và cộng sự [110] áp dụng phương pháp cầu phương vi phân (variational differential quadrature - VDQ), Ansari và cộng sự [18] kết hợp phương pháp VDQ với phương pháp FEM. Tác giả Kiani [55] sử dụng phương pháp Ritz cho phân tích mất ổn định tấm FG-CNTRC chịu tải cắt. Sau đó, Kiani và Mirzaei [60] áp dụng phương pháp này cho phân tích mất ổn định của tấm chữ nhật và tấm xiên. Tác giả Civalek và Jalaei [31] sử dụng phương pháp discrete singular convolution nghiên cứu tấm xiên FG-CNTRC. Sử

dụng mô hình vật liệu Eshelby–Mori–Tanaka, Safaei và cộng sự [91] đã trình bày kết quả phân tích ứng xử mất ổn định của tấm sandwich có lỗ rỗng bằng phương pháp lưới tự do. Jiao [52] phân tích ứng xử mất ổn định của tấm FG-CNTRC chịu tải nén phân bố bất kỳ sử dụng phương pháp cầu phương vi phân.

Một số nghiên cứu về phân tích dao động tự do và đáp ứng động lực học của tấm FG-CNTRC, tác giả Zhang và cộng sự [121] áp dụng phương pháp IMLS-Ritz lưới tự do để phân tích dao động tự do của tấm FG-CNTRC dựa trên lý thuyết FSDT. Sau đó, các tác giả đã phát triển cho phân tích tấm dày đặt trên nền đàn hồi [122]. Dựa trên lý thuyết FSDT và nguyên lý biến phân, tác giả Zhong và công sự [129] sử dụng chuỗi Fourier để thay cho dạng nghiệm truyền thống của phương pháp Ritz. Tác giả Thai và cộng sự [105] trình bày phương pháp moving Kriging mesh-free kết hợp với lý thuyết HSDT và phi địa phương để phân tích tấm FG-CNTRC. Di và cộng sự [36] thiết lập các mô hình tính toán dựa trên phương pháp phần tử cầu phương dạng yếu và lý thuyết HSDT cho phân tích tấm FG-CNTRC. Tác giả Beni [27] cải tiến công thức Carrera áp dụng cho phân tích tần số riêng của tấm tròn FG-CNTRC với phương trình chuyển động được xây dựng bằng nguyên lý công ảo và giải bằng phương pháp GDQ. Tác giả Moradi-Dastjerdi và Momeni-Khabisi [76] phân tích dao động của tấm sandwich đặt trên nền đàn hồi chịu tải tuần hoàn. Tác giả Vahid [104] sử dụng mô hình Eshelby–Mori–Tanaka xác định tính chất của các ống CNT gia cường tùy ý vào tấm composite. Sự gia cường của CNT vào nền FGM có thể giúp tăng đáng kể các tính chất cơ học của vật liệu composite. Tác giả Rostami và Mohammadimehr [90] sử dụng lý thuyết tấm cổ điển để phân tích độ ổn định động của tấm sandwich bao gồm lõi FGM và mặt ngoài composite được gia cường FG-CNT, xem xét môi trường phụ thuộc vào nhiệt độ và tải trọng ngẫu nhiên.

Bài toán phân tích tĩnh và động lực học của tấm FG-CNTRC cũng nhận được sự quan tâm của các nhà khoa học trong nước. Tác giả Nguyễn Đình Đức và cộng sự sử dụng phương pháp Galerkin và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba cho

phân tích đáp ứng động lực học của tấm dày FG-CNTRC với điều kiện biên tựa đơn [33, 39, 109]. Một số kết quả về phân tích ổn định và động lực học phi tuyến của tấm FG-CNTRC tựa đơn các cạnh sử dụng phương pháp giải tích và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba [4], ổn định nhiệt đàn hồi của tấm FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt với điều kiện biên tựa đơn sử dụng phương pháp giải tích và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba [7], phân tích tĩnh và dao động riêng của tấm gia cường carbon nanotube áp điện sử dụng phương pháp FEM và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn bậc tự do [5].

## 1.3. Tổng quan phân tích vỏ FG-CNTRC

Vỏ là kết cấu được sử dụng nhiều trong các ứng dụng thực tế. Để nâng cao khả năng chịu tải cũng như độ bền và độ cứng của vỏ, nhiều học giả đã nghiên cứu ứng xử cơ học của vỏ gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

Trong phân tích tĩnh, tác giả Zghal và cộng sự [120] đã sử dụng phần tử vỏ discrete double-director trong phương pháp FEM nhằm xác định ứng xử tĩnh học của panel trụ FG-CNTRC. Kết quả được so sánh với tác giả Zhang và cộng sự [124], sử dụng phần tử không lưới. Tác giả Frikha và cộng sự [45] sử dụng phần tử vỏ ba và bốn nút và lý thuyết Kirchhoff cho phân tích vỏ mỏng FG-CNTRC. Tác giả Ansari và Kumar [17] phát triển chương trình FEM cho vật liệu FG-CNT sử dụng phẩn tử 9 nút aCO cho phân tích uốn của vỏ hai độ cong. Alibeigloo [12] giả thiết tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ, sử dụng chuỗi khai triển Fourier để nhận được trường ứng suất và chuyển vị. Sau đó, Alibeigloo và Zanoosi [13] phát triển cho phân tích uốn vỏ trụ tròn có lớp áp điện.

Đối với nghiên cứu mất ổn định của vỏ FG-CNTRC, tác giả Mehri và cộng sự [74] sử dụng phương pháp bán giải tích phân tích xác định giá trị tải tới hạn của vỏ nón FG-CNTRC chịu tải nén dọc trục và áp lực ngoài kết hợp. Sử dụng lý thuyết FSDT, Tác giả Nguyen và công sự [79] phân tích sau mất ổn

định của vỏ FG-CNTRC, với phương pháp mô phỏng số kết hợp giữa FEM và CAD. Dựa trên lý thuyết đàn hồi 3D, Liew và Alibeigloo [67] phân tích mất ổn định panle trụ FG-CNTRC chịu tải nén dọc trục với điều kiện biên tựa đơn các cạnh. Hajlaoui và cộng sự [46] cải tiến phần tử khối để mô tả trường biến dạng cắt phân bố phi tuyến nhằm xử lý hiện tượng shear lockling trong phương pháp FEM, áp dụng cho phân tích mất ổn định của vỏ trụ tròn FG-CNTRC. Tác giả Safarpour và cộng sự [73] trình bày kết quả tải tới hạn của vỏ trụ FG-CNTRC có lớp áp điện. Tác giả Mehar và cộng sự [73] sử dụng phương pháp biến phân cho phân tích mất ổn định của vỏ sandwich FG-CNTRC.

Đối với phân tích động lực học của vỏ FG-CNTRC, tác Qin và cộng sự [83] xem xét ảnh hưởng ly tâm và Coriolis tới biến dạng của vỏ FG-CNTRC cho phân tích tần số riêng sử dụng phương pháp Ritz. Tác giả Kiani [57] sử dụng phương pháp Ritz với hàm dạng sử dụng phương pháp Gram-Schmidt cho phân tích panel cầu FG-CNTRC. Sau đó, Kiani và cộng sự [59] phát triển cho panel nón. Dựa trên lý thuyết FSDT và phương pháp biến phân Ritz, tác giả Wang [118] sử dụng phương pháp bán giải tích cho phân tích tần số riêng của vỏ và panel hai độ cong với dạng nghiệm sử dụng chuỗi khai triển Fourier. Song và cộng sự [101] sử dụng nguyên lý Hamilton thiết lập phương trình chuyển động cho phân tích vỏ hai độ cong FG-CNTRC. Tác giả Kiani [56] sử dụng phương pháp Newmark giải phương trình vi phân động học xác định mối liên hệ vận tốc theo thời gian. Tác giả Frikha và công sự [44] cũng sử dụng phương pháp này cho phân tích vỏ FG-CNTRC. Phân tích tính không hoàn hoản của vỏ, tác giả Foroutan [43] dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển cho panel không hoàn hảo chịu tải nén trong môi trường nhiệt độ. Tác giả Amipour và cộng sự [34] sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ cho bài toán truyền sóng của vỏ hai độ cong FGM gia cường FG-CNT. Tác giả Miao và cộng sự [75] trình bày nghiên cứu với sự kết hợp FG-CNT gia cường vỏ trụ nền FGM nhiều lớp giúp tăng cường các tính chất cơ học và tần số riêng dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và phương pháp Rayleigh-Ritz.

Vật liệu composite gia cường FG-CNT là loại vật liệu không đồng nhất, có thể lý thuyết tuyến tính thông thường không phù hợp để phân tích. Ngoài ra, sự phân bố thể tích của CNT là biến đổi tuyến tính, dẫn đến module cắt ngang thấp hơn so với module đàn hồi tương ứng theo phương vật liệu gia cường. Do đó, các kết cấu composite được gia cường FG-CNT có tồn tại biến dạng cắt ngang và bất kỳ phân tích nào cũng nên tính đến các biến dạng cắt ngang. Trong lý thuyết FSDT, có kể tới thành phần biến dạng cắt ngang và ứng suất cắt ngang nhưng chỉ xét tới mối quan hệ tuyến tính nên cần đưa vào hệ số hiệu chỉnh, việc sử dụng hệ số này đòi hỏi phải xác định được hệ số hiệu chỉnh tương ứng cho các hình dạng kết cấu và vật liệu khác nhau. Hơn nữa, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất được áp dụng để xây dựng các phương trình cơ bản cho phân tích động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC [49, 64, 66, 82].

Việc xác định hệ số hiệu chỉnh không chỉ phụ thuộc vào hệ số Poisson mà còn phụ thuộc vào các đặc tính vật liệu và tiết diện mặt cắt. việc này gây bất tiện khi sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất vì khó có được giá trị chính xác khi tính toán hệ số này bày lý thuyết. Để đưa ra những dự đoán chính xác hơn về ảnh hưởng của các thành phần biến dạng cắt ngang và ứng suất cắt với phân tích mất ổn định, uốn và dao động tự do của kết cấu, một số lý thuyết HSDT đã được phát triển. Một trong những lý thuyết được sử dụng phổ biến nhất là lý thuyết TSDT được đề xuất bởi Reddy [86]. Nhiều nghiên cứu đã được tiến hành để đánh giá việc áp dụng TSDT trong các tình huống khác nhau. Tác giả Shen [92, 97] đã sử dụng lý thuyết này để phân tích mất ổn định phi tuyến của tấm tựa đơn gia cường CNT. Tác giả Mehar và Panda [71] đã nghiên cứu mất ổn định phi tuyến hình học của hai độ cong. Tác giả Zhang và cộng sự [125, 127] đã trình bày kết quả tần số dao động tự do của các tấm nhiều lớp. Một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khác cũng được sử dụng là lý thuyết biến dạng cắt hình sin [22, 23, 85, 106]. Những nghiên cứu này đã chứng minh rằng việc áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có thể đưa ra những dự đoán chính xác về bài toán phân tích tĩnh và động của các kết cấu tấm và vỏ.

Các nhà khoa học trong nước cũng có những kết quả đóng góp cho bài toán phân tích ổn định, mất ổn định, và động lực học của vỏ FG-CNTRC. Sử dụng phương pháp giải tích cho phân tích dao động tự do và đáp ứng động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC được trình bày bởi tác giải Nguyễn Đình Đức và cộng sự [11, 32, 37, 38, 40]. Tác giả Vũ Hoài Nam và cộng sự sử dụng phương pháp giải tích cho phân tích mất ổn định của vỏ trống FG-CNTRC trong môi trường nhiệt độ [114, 115]. Tác giả Trần Minh Tú và cộng sự trình bày kết quả tần số dao động tự do của panel cầu [111] và vỏ hai độ cong [107] áp điện FG-CNTRC sử dụng phương pháp FEM với lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn bậc tự do. Tác giả Phạm Toàn Thắng và Nguyễn Thời Trung [108] sử dụng phương pháp Galerkin và lý thuyết vỏ Donnell cho phân tích mất ổn định phi tuyến của vỏ trụ tròn FG-CNTRC với điều kiện biên tựa đơn. Một số kết quả phân tích tĩnh và động của vỏ FG-CNTRC liên quan tới các luận án sau [1–5].

## 1.4. Kết luận chung và xác định vấn đề nghiên cứu

***Từ tổng quan nghiên cứu về tấm, vỏ gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên, có thể rút ra một số kết luận như sau:***

- Các bài toán phân tích cơ học của kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC chủ yếu gồm: Phân tích uốn, mất ổn định, sau mất ổn định, dao động tự do, và đáp ứng động lực học.

- Các phương trình cơ bản của tấm vỏ được xây dựng dựa trên nguyên lý công ảo và Hamilton kết hợp với các lý thuyết biến dạng cắt FSDT, HSDT, TSDT, Zigzag.

- Các phương pháp chính cho phân tích cơ học của kết cấu FG-CNTRC gồm phương pháp biến phân, phương pháp Galerkin, phương pháp Ritz, phương pháp FEM, phương pháp cầu phương vi phân, phương pháp perturbation.

- Các mô hình vật liệu FG-CNT có thể kể tới quy tắc nền sợi, phương pháp MD, Mô hình Mori-Tanaka, mô hình Halpin-Tsai, phương pháp RVE.

- Các nghiên cứu về kết cấu tấm FG-CNTRC tương đối hoàn thiện nhưng có ít nghiên cứu kết cấu kết hợp như tấm-panel, vỏ hai độ cong-panel, vỏ hai độ cong-vỏ cầu.

***Dựa trên cơ sở trên, một số vấn đề nghiên cứu được xác định trong luận án như sau:***

- Thiết lập các phương trình cân bằng và chuyển động sử dụng nguyên lý công ảo và Hamilton dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, lý thuyết biến dạng cắt hình sin kết hợp với tính phi tuyến hình học Von-Kármán.

- Đề xuất lý thuyết biến dạng cắt hình sin giản lược từ lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, mô tả mối liên hệ phi tuyến của ứng suất tiếp và biến dạng cắt của vỏ với điều kiện ứng suất tiếp tự do trên hai mặt trên và dưới của vỏ. Từ đó, xác định trường chuyển vị của vỏ và áp nguyên lý xây dựng trường biến dạng phi tuyến Von-Kármán nhằm xây dựng phương trình chuyển động dựa trên nguyên lý Hamilton.

- Phân tích các bài toán mất ổn định, dao động tự do và đáp ứng động học của kết cấu tấm, vỏ gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

- Tìm dạng nghiệm giải tích của chuyển vị và hàm ứng suất tương ứng cho ba trường hợp điều kiện biên của vỏ hai độ cong được khảo sát: Trường hợp tất cả các cạnh tựa đơn, trường hợp tất cả các cạnh ngàm và trường hợp hai cạnh tựa đơn, hai cạnh ngàm.

- Phương pháp bán giải tích và mô phỏng số được áp dụng để phân tích bài toán mất ổn định của tấm FG-CNTRC. Đối với phương pháp bán giải tích, kết hợp phương pháp Galerkin, hàm ứng suất Airy và cân bằng điều hòa để xác định nghiệm của bài toán. Đối với phương pháp mô phỏng số, mô

hình phần tử hữu hạn với hàm con USDFLD trong ABAQUS được thiết lập nhằm mô tả sự phân bố biến đổi chức năng theo chiều dày của các ống nano carbon.

- Phân tích cơ học kết cấu kết hợp các dạng hình học khác nhau như tấm, panel trụ, vỏ hai độ cong. Khảo sát ảnh hưởng thông số vật liệu FG-CNT và thông số hình học tới giá trị tải tới hạn, đường cong tải trọng - độ võng sau tới hạn, tần số riêng, mối liên hệ biên độ - tần số và độ võng - thời gian.

# CHƯƠNG 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

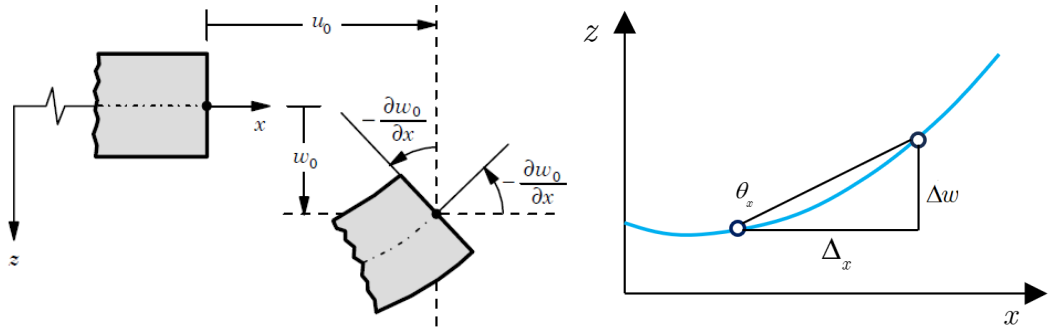
## 2.1. Các lý thuyết cơ bản

Phần này trình bày các lý thuyết được áp dụng để xây dựng các phương trình cơ bản cho kết cấu tấm và vỏ composite gia cường các ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

Lý thuyết cổ điển thiết lập các phương trình đơn giản nhưng bỏ qua thành phần biến dạng cắt và ứng suất tiếp do đó chỉ phù hợp cho các kết cấu tấm và vỏ mỏng. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có xét tới thành phần biến dạng cắt và ứng suất tiếp nhưng chỉ xét mối quan hệ này là tuyến tính nên cần đưa vào hệ số hiệu chỉnh, việc sử dụng hệ số này đòi hỏi phải xác định được hệ số hiệu chỉnh tương ứng cho các hình dạng kết cấu và vật liệu khác nhau. Vì vậy, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất phù hợp cho kết cấu tấm và vỏ vừa. Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba đã mô tả mối quan hệ của các thành phần biến dạng cắt và ứng suất tiếp bằng hàm phi tuyến, phù hợp cho mô tả ứng xử của kết cấu tấm và vỏ. Tuy nhiên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba cũng tương đối phức tạp và cần nhiều tính toán để đạt được độ chính xác trong việc thiết lập các phương trình cơ bản của tấm và vỏ. Để khắc phục nhược điểm của lý biến dạng cắt bậc nhất trong việc sử dụng hệ số hiệu chỉnh, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được đề xuất với mô tả tưng tự như lý thuyết bậc ba nhưng đơn giản hơn trong việc tính toán thiết lập các phương trình cân bằng và chuyển động của tấm và vỏ FG-CNTRC.

### *2.1.1. Lý thuyết tấm cổ điển*

Lý thuyết tấm cổ điển (CPT) [88] theo giả thiết Kirchhoff được sử dụng để xây dựng các phương trình cơ bản cho tấm mỏng (tấm có độ dày rất nhỏ so với chiều dài hoặc chiều rộng, cụ thể tỉ lệ chiều dài trên độ dày lớn hơn 50) với giả thiết đường pháp tuyến trước và sau biến dạng đều thẳng và vuông góc với mặt giữa của tấm và bỏ qua thành phần ứng suất tiếp [88]. Hình 2.1 mô tả thành phần chuyển vị của tấm theo lý thuyết CPT.




***Hình 2.1:*** *Mặt cắt trước và sau biến dạng của tấm theo lý thuyết CPT*

trong đó, $u_0(x, y, t)$ là thành phần chuyển vị ban đầu theo trục $x$, $w_0(x, y, t)$ là thành phần chuyển vị ban đầu theo trục $z$, $\theta_x$ là độ dốc (slope) theo trục $x$.

Từ Hình 2.1 khi khoảng cách $\Delta x \to 0$ thì $\tan(\theta_x) \to \theta_x$, độ dốc được xác định như sau:

$$\theta_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx} \approx \frac{\partial w}{\partial x} \text{ với } \tan(\theta_x) = \frac{\Delta w}{\Delta x} \tag{2.1}$$

Từ đó xác định giá trị chuyển vị $u(x, y, z, t)$ theo chuyển vị ban đầu $u_0(x, y, t)$ với trục $z$ hướng xuống dưới như sau:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\theta_x = u_0(x, y, t) - z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.2}$$

Thành phần chuyển vị theo trục $y$ được xác định tương tự, như vậy các thành

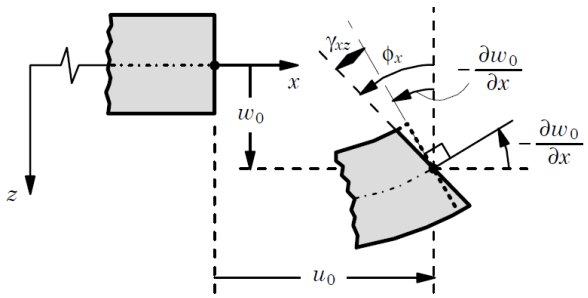
phần chuyển vị của tấm theo lý thuyết cổ điển được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

trong đó, $u_0(x,y,t)$,$v_0(x,y,t)$,$w_0(x,y,t)$ là các chuyển vị tại mặt giữa tương ứng với trục $x,y,z$

### *2.1.2. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất*

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất được sử dụng để xây dựng các phương trình cơ bản cho tấm dày (tỉ lệ chiều dài trên độ dày nhỏ hơn hoặc bằng 20). Trong đó, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) [88] có xét tới các thành phần biến dạng cắt và ứng suất tiếp nhưng mối quan hệ giữa hai đại lượng này là tuyến tính nên cần đưa vào hệ số hiệu chỉnh.




***Hình 2.2:*** *Mặt cắt trước và sau biến dạng của tấm theo lý thuyết FSDT*

Tương tự như các xác định của lý thuyết CPT, từ Hình 2.2 các thành phần chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

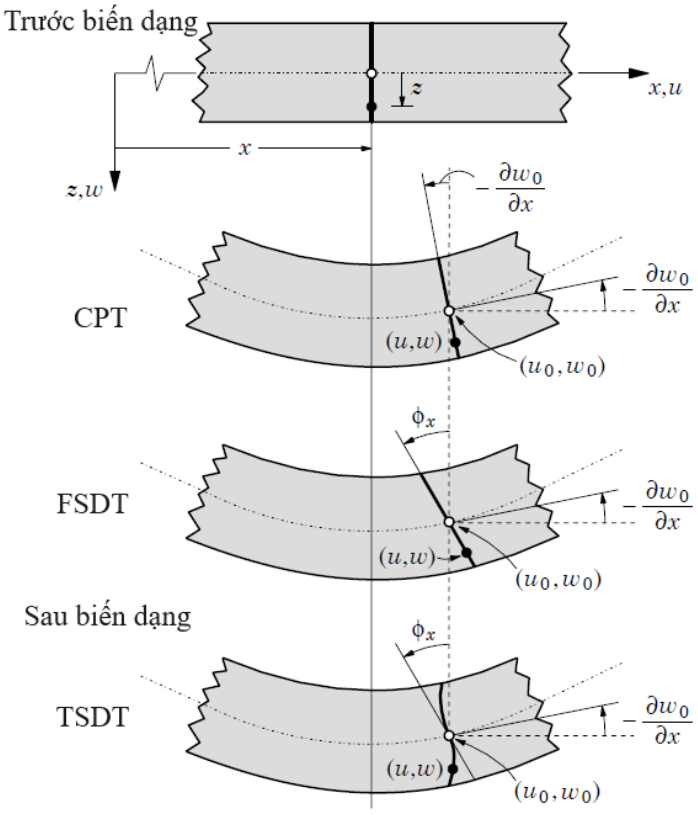
trong đó, $u_0(x,y,t)$,$v_0(x,y,t)$,$w_0(x,y,t)$ là chuyển vị tại mặt giữa; $\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z}$, $\phi_y =$

$\frac{\partial u}{\partial z}$ là góc quay tương ứng quanh trục $y$, $x$.

Trong trường hợp tấm mỏng (tỉ lệ chiều dài trên độ dày lớn hơn 50) khi đó $\phi_x \to -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\phi_y \to -\frac{\partial w}{\partial y}$ lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất trở về lý thuyết cổ điển.

### *2.1.3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba*

Lý thuyết biến cắt dạng bậc ba (TSDT) [88] được xây dựng trên cơ sở của lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất cho tấm dày (tỉ lệ chiều dài trên độ dày nhỏ hơn hoặc bằng 20) với giả thiết đường pháp tuyến của mặt trung bình sau biến dạng không còn thẳng và vuông góc nữa như Hình 2.3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba đưa ra giả thiết chính xác hơn về ảnh hưởng của các thành phần biến dạng cắt và ứng suất tiếp trong phân tích kết cấu tấm và vỏ.




***Hình 2.3:*** *Mặt cắt trước và sau biến dạng của tấm theo lý thuyết TSDT*

Các thành phần chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy

được xác định như sau:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x + z^2\theta_x + z^3\lambda_x \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y + z^2\theta_y + z^3\lambda_x \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

trong đó, các hàm $\phi_x$, $\phi_y$, $\theta_x$, $\theta_y$, $\lambda_x$, $\lambda_y$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} &u_0 = (x,y,0,t), \quad v_0 = (x,y,0,t), \quad w_0 = (x,y,0,t) \\ &\phi_x = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad \phi_y = \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0}, \quad 2\theta_x = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z=0} \\ &2\theta_y = \left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z=0}, \quad 6\lambda_x = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right|_{z=0}, \quad 6\lambda_y = \left.\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\right|_{z=0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 trong phương trình (2.5) gồm có 9 biến độc lập chưa xác định, các biến này có thể được giảm bớt bằng cách xét điều kiện biên ứng suất tiếp tại mặt trên và dưới của tấm bằng không ($\sigma_{xz}|_{z=\pm h/2} = \sigma_{xz}|_{z=\pm h/2} = 0$) tương đương:

$$\begin{aligned} 0 = \sigma_{xz}|_{z=\pm\frac{h}{2}} &= Q_{55}\gamma_{xz}|_{z=\pm\frac{h}{2}} + Q_{45}\gamma_{yz}\big|_{z=\pm\frac{h}{2}} \\ 0 = \sigma_{yz}\big|_{z=\pm\frac{h}{2}} &= Q_{45}\gamma_{xz}|_{z=\pm\frac{h}{2}} + Q_{44}\gamma_{yz}\big|_{z=\pm\frac{h}{2}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó, $Q_{ij}(i,j=4,5)$ tùy ý ta có:

$$\begin{aligned} 0 = \gamma_{xz}|_{z=\pm\frac{h}{2}} &= \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(2z\theta_x + 3z^2\lambda_x\right)\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} \\ 0 = \gamma_{yz}\big|_{z=\pm\frac{h}{2}} &= \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left(2z\theta_y + 3z^2\lambda_y\right)\Big|_{z=\pm\frac{h}{2}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Thay $z = \pm\frac{h}{2}$ phương trình trên được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} &\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(-h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x\right) = 0, \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(h\theta_x + \frac{3h^2}{4}\lambda_x\right) = 0 \\ &\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left(-h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y\right) = 0, \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \left(h\theta_y + \frac{3h^2}{4}\lambda_y\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Từ đó xác định được hàm độ dốc như sau:

$$\theta_x = \theta_y = 0, \lambda_x = -\frac{4}{3h^2}\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right), \lambda_y = -\frac{4}{3h^2}\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \tag{2.10}$$

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,z,t) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,z,t) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

trong đó, $u_0(x,y,t)$,$v_0(x,y,t)$,$w_0(x,y,t)$ là chuyển vị tại mặt giữa, $\phi_x(x,y,t) = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$, $\phi_y(x,y,t) = \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0}$ là góc quay tương ứng tại $z=0$.

### *2.1.4. Lý thuyết biến dạng cắt hình sin*

Trong trường hợp cần đòi hỏi những dự đoán chính xác hơn về ảnh hưởng của các thành phần biến dạng cắt và ứng suất tiếp với phân tích mất ổn định và dao động tự do của kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC và đơn giản tính toán hơn lý thuyết biến dạng cắt bậc 3, lý thuyết biến dạng cắt hình sin (SSDT) đã được phát triển. Với lý thuyết SSDT, các thành phần chuyển vị $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ tương ứng theo các hướng $x,y,z$ xác định theo công thức sau:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{2.12}$$

trong đó, $u_0(x,y,t)$,$v_0(x,y,t)$,$w_0(x,y,t)$ là chuyển vị tại mặt giữa, $\phi(x,y,t)$ là góc quay tương ứng tại $z=0$ ( $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$).

Trường chuyển vị được xác định thỏa mãn điều kiện biên ứng suất tiếp tự do tại mặt trên và dưới của vỏ ($\sigma_{xz}|_{z=\pm h/2} = \sigma_{xz}|_{z=\pm h/2} = 0$). Trong luận án này, hàm $f(z) = -\frac{h}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{2}\right)$ mô tả mối quan hệ phi tuyến giữa biến dạng cắt và ứng suất tiếp, được lựa chọn là hàm điều hòa thỏa mãn điều kiện cho trường chuyển vị tương đương $\left.f(z)\right|_{z=0} = 0$, $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=0} = 1$ và $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=\pm h/2} = 0$.

### *2.1.5. Trường biến dạng phi tuyến Von-Kármán*

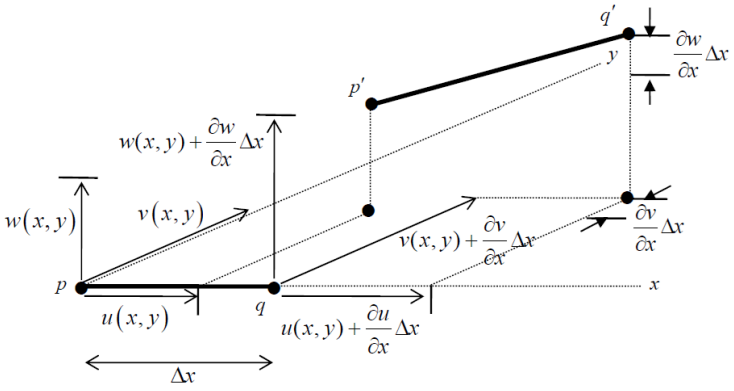
Tính phi tuyến hình học trong các thành phần biến dạng được đề xuất bởi Von-Kármán vào năm 1910 [113] nhằm mục đích mô tả trường biến dạng có kể tới thành phần phi tuyến của độ võng.

Xét một phần tử đường có chiều dài $\Delta_x$ dọc theo trục $x$. Cho phần tử dịch chuyển như Hình 2.4 với $u, v, w$ là các thành phần chuyển vị theo trục $x, y, z$, $dS, ds$ lần lượt đại diện cho chiều dài của phần tử trước và sau biến dạng. Biến dạng theo trục $x$ được xác định như sau:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{ds - dS}{dS} = \frac{\left|p'q'\right| - |pq|}{|pq|} \tag{2.13}$$

Thay độ dài $pq$ và $p'q'$ vào phương trình (2.13) nhận được kết quả sau

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left|p'q'\right| - |pq|}{|pq|} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \tag{2.14}$$




***Hình 2.4:*** *Biến dạng của phần tử theo trục x*

Theo lý thuyết tấm, giả sử các thành phần đạo hàm của chuyển vị gồm $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ là nhỏ, vì vậy bỏ qua các thành phần bậc cao của các thành phần này. Tuy nhiên, các thành phần đạo hàm bậc 2 và tích vô hướng của độ dốc là các thành phần quan trong vẫn được giữ lại gồm $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$,

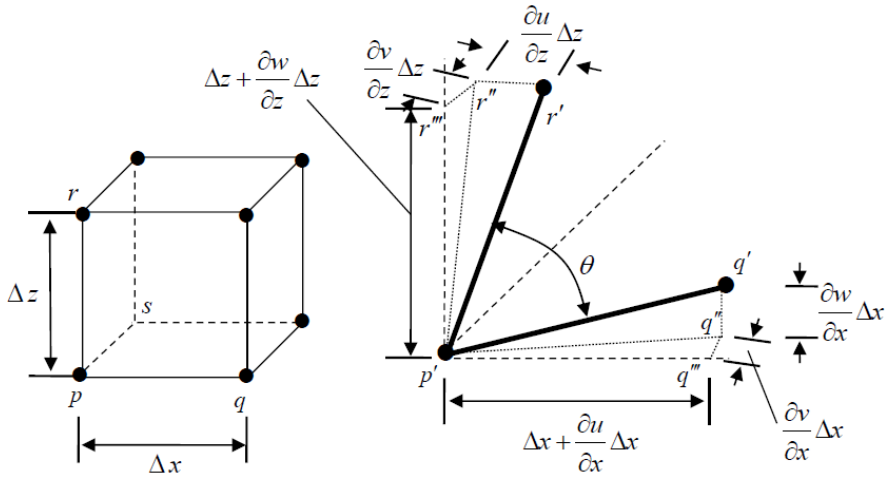
$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$. Từ các giả thiết này phương trình (2.14) được giản lược như sau:

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \tag{2.15}$$

Với $x << 1$ có $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, ta có thành phần biến dạng $\epsilon_{xx}$ từ phương trình (2.15) (các thành phần biến dạng dài $\epsilon_{yy}$, $\epsilon_{zz}$ được xây dựng tương tự) nhận được như sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Xét góc giữa hai phần tử đường sau biến dạng $\theta = \angle r'p'q'$ trong mặt phẳng $x-y$ mà trước biến dạng phần tử này có hướng theo trục $x$ và $y$ với độ dài tương ứng là $\Delta_x$ và $\Delta_y$ như Hình 2.5, với $\gamma = \frac{pi}{2} - \theta$ là góc $\angle rpq$ trong phần tử đường ban đầu.




***Hình 2.5:*** *Mặt cắt tính biến dạng cắt*

Ta có góc $\theta$ là góc xen giữa hai vector $\overrightarrow{p'q'}$ và $\overrightarrow{p'r'}$, được các định như sau:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{p'q'} \cdot \overrightarrow{p'r'}}{|p'q'| \cdot |p'r'|} = \frac{\left|p'q'''\right|\left|r''r'\right| + \left|q'''q''\right|\left|r'''r''\right| + \left|q''q'\right|\left|p'r'''\right|}{|p'q'| \cdot |p'r'|}$$
$$= \frac{\left(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x\right)\left(\Delta z + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right)}{\left(\Delta x\sqrt{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\right)\left(\Delta z\sqrt{\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}\right)} \tag{2.17}$$

Bỏ qua đạo hàm của các chuyển vị phương trình (2.17) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\Delta x\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x\right)\Delta z}{\Delta x\Delta z} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{2.18}$$

Giả thiết góc $\gamma$ nhỏ, do đó $\gamma = sin(\gamma) = cos(\theta)$, tương tự các thành phần biến dạng cắt khác được xác định là cosin của góc giữa hai phần tử đường như sau:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{2.19}$$

Trường biến dạng Von-Kármán cho lý thuyết cổ điển ($\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$) được xác định lại từ phương trình (2.16) và phương trình (2.19) như sau:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned} \tag{2.20}$$

Trường biến dạng phí tuyến Von-Kármán cho lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ($\epsilon_{zz} = 0$) được xác định lại từ phương trình (2.16) và phương trình (2.19) như sau:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

## 2.2. Các nguyên lý cơ bản

### *2.2.1. Nguyên lý công ảo*

Nguyên lý công ảo là một nguyên lý quan trọng trong cơ học được sử dụng để xây dựng phương trình cân bằng cho vật rắn biến dạng. Nguyên lý công ảo được xây dựng dựa trên khái niệm dịch chuyển khả dĩ, nghĩa là các chuyển vị có thể, vô cùng bé chỉ có ý nghĩa về mặt hình học và thỏa mãn các ràng buộc của hệ.

Nguyên lý công ảo phát biểu rằng [88]: *Nếu một vật thể đang trong trạng thái cân bằng thì công ảo của tất cả các lực tác dụng lên vật thể gồm nội lực và ngoại lực qua các chuyển dịch khả dĩ sẽ bằng không*:

$$\delta W \equiv \delta W_I + \delta W_E = 0 \tag{2.22}$$

trong đó, $\delta W_I = \int\limits_V \sigma\, \delta\varepsilon dV$ là công ảo của nội lực, $\delta W_E = -\int\limits_V \rho f \cdot \delta u dV - \int\limits_S T \cdot \delta u ds$ là công ảo của ngoại lực với $f$ là thành phần lực khối của vật thể trong miền thể tích $V$, $T$ là lực mặt trên biên $S$. $u, \dot{u}$ lần lượt đại diện cho thành phần chuyển vị và đạo hàm chuyển vị theo thời gian, $\delta$ là toán tử biến phân.

### *2.2.2. Nguyên lý Hamilton*

Nguyên lý Hamilton là trường hợp tổng quát của nguyên lý công ảo cho bài toán động lực học, được xây dựng dựa trên các hàm năng lượng của hệ, với giả thiết hệ động lực học được đặc trưng bởi hai hàm năng lượng là Động năng $K$ và Thế năng $W$.

Nguyên lý Hamilton phát biểu rằng [88]: *Trong tất cả các đường di chuyển mà một chất điểm có thể đi từ vị trí tại thời điểm $t_1$ tới vị trí tại thời điểm $t_2$, thì đường đi thực tế của nó được xác định khi tích phân $\int_{t_1}^{t_2} (K - W)\, dt$ đạt cực trị.*

Sự khác biệt giữa động năng và thế năng được gọi là hàm Lagrange $L = K - W = K - W_I - W_E$. Vì vậy, Nguyên lý Hamilton được viết lại như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta W_I - \delta W_E)\, dt = 0 \tag{2.23}$$

trong đó, $\delta K = \int_V \rho \ddot{u} \delta u dV$ là biến phân của động năng, $\delta W_I = \int_V \sigma\, \delta\varepsilon dV$ là biến phân của năng lượng biến dạng đàn hồi, $\delta W_E = -\int_V \rho f \cdot \delta u dV - \int_S T \cdot \delta u ds$ là biến phân của thế năng.

### *2.2.3. Phương pháp Galerkin*

Các phương trình của bài toán phân tích tấm vỏ được xây dựng dựa trên nguyên lý công ảo hoặc nguyên lý Hamilton thường là các phương trình đạo hàm riêng với điều kiện biên. Các phương trình này là hàm theo tọa độ và thời gian và không thể giải được môt cách tường minh. Do đó, trong giới hạn luận án sử dụng phương pháp Galerkin để tính gần đúng nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng.

Phương pháp Galerkin là một phương pháp số dựa trên nguyên lý biến phân được đặt tên theo nhà toán học Boris Galerkin. Các bước chính trong phương

pháp Galerkin gồm:

- Chọn không gian nghiệm: Không gian nghiệm Galerkin được chọn là không gian con hữu hạn chiều gồm hữu hạn hàm cơ sở.
- Tìm dạng hàm nghiệm: Dạng hàm nghiệm gần đúng là một tổ hợp tuyến tính của các hàm cơ sở trong không gian Galerkin. Hàm nghiệm này phải thỏa mãn điều kiện biên của phương trình đạo hàm riêng cần giải. Trong đó, các hệ số tương ứng của các hàm cơ sở được coi như các biến cần phải xác định.
- Xác định các hệ số của các hàm cơ sở: Thay dạng nghiệm gần đúng vào phương trình đạo hàm riêng ban đầu. Nhận được sự sai khác giữa phương trình ban đầu với nghiệm gần đúng (gọi sự sai khác này là hàm lỗi).
- Tối thiểu hóa sai số: Hàm lỗi phải thỏa mãn một số điều kiện nhằm tối thiểu hóa sai số. Điều kiện tối thiểu hóa hàm lỗi là tích phân của hàm lỗi với một hàm thử (hàm trọng số) bất kỳ bằng không.
- Giải phương trình đại số và xác định dạng hàm nghiệm: Giải các phương trình đại số để tìm các hệ số của các hàm cơ sở và xác định dạng hàm nghiệm gần đúng.

**Mô tả toán học:**

Giả sử phương trình đạo hàm riêng trong miền $\Omega$ với điều kiện biên cho trước có dạng sau:

$$L(u) + f = 0 \tag{2.24}$$

trong đó, $u$ là các biến phụ thuộc và chưa xác định (có thể là các chuyển vị); $f$ là hàm lực đã biết; $L$ đại diện cho toán tử vi phân.

Gọi $u_N \approx u$ là nghiệm xấp xỉ của phương trình đạo hàm riêng. Nghiệm xấp

xỉ này là tổ hợp tuyến tính của n hàm cơ sở định nghĩa như sau:

$$u_N = \sum_{i}^{n} a_i \Phi_i = a_1 \Phi_1 + ... + a_n \Phi_n \tag{2.25}$$

với $a_i$ là các hệ số; $\Phi_i$ là các hàm cơ cở.

Hàm lỗi (phần dư) của nghiệm xấp xỉ sau khi thay vào phương trình đạo hàm riêng ban đầu:

$$R_N = L\left(\sum_{i}^{n} a_i \Phi_i\right) + f \neq 0 \tag{2.26}$$

Các hệ số $a_i$ được xác định sao cho hàm lỗi ở phương trình (2.26) thỏa mãn điều kiện trực giao với hàm trọng số. Phương pháp Galerkin lựa chọn hàm trọng số là hàm cơ sở của dạng nghiệm $\Phi_i$, vì vậy các hệ số $a_i$ được xác định theo điều kiện sau:

$$\int_{\Omega} \Phi_i R_N(a_i, \Phi_i, f) d\Omega = 0 \tag{2.27}$$

trong đó, $R_N$ là hàm lỗi, $\Phi_i$ là hàm trọng số.

### *2.2.4. Phương pháp Runge-Kutta*

Trong bài toán động lực học tấm vỏ, phương trình đạo hàm riêng chuyển động được giải bằng phương pháp Galerkin đưa phương trình đạo hàm riêng chuyển động về phương trình vi phân chuyển động theo thời gian. Trong luận án lựa chọn phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để giải phương trình vi phân chuyển động.

Một trong những phương pháp số được sử dụng rộng rãi để giải phương trình vi phân là họ phương pháp Runge-Kutta. Họ phương pháp Runge-Kutta nhận được từ khai triển chuỗi Taylor bỏ qua các đạo hàm bậc cao. Họ phương pháp này gồm phương pháp Rung-Kutta bậc 1 (phương pháp Euler), bậc 2 (phương pháp Heun, Midpoint, Ralston), bậc 3, bậc 4 và bậc 5, các phương pháp này dựa trên việc rời rạc hóa thời gian để tìm lời giải gần đúng cho các phương trình vi

phân thường. Trong đó, phương pháp Runge-Kutta bậc 4 là được sử dụng phổ biến nhất.

**Mô tả toán học**:

Giả sử cho trước phương trình vi phân thường với giá trị đầu như sau:

$$\dot{y} = f(t, y),\ y(t_0) = y_0 \tag{2.28}$$

trong đó, phương trình trên là hàcó nghiệm m gần đúmột ng $y$ theo biến thời gian $t$; $f(t, y)$ là độ dốc (slope) của hàm $y$. Tại thời điểm ban đầu $t_0$ giá trị $y$ tương ứng là $y_0$.

Khai triển Taylor cho hàm $y(t)$ tại $t_i + h$ như sau:

$$y\left(t_i + h\right) = y\left(t_i\right) + \dot{y}\left(t_i\right) h + \ddot{y}\left(t_i\right) \frac{h^2}{2!} + \left(t_i\right) \frac{h^3}{3!} + \left(t_i\right) \frac{h^4}{4!} + \mathrm{O}\left(h^5\right), \tag{2.29}$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Thay phương trình vi phân (2.28) và phương trình (2.29) thu được phương trình sau:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(f\left(t_i, y_i\right) + \dot{f}\left(t_i, y_i\right) \frac{h}{2} + \ddot{f}\left(t_i, y_i\right) \frac{h^2}{6} + \left(t_i, y_i\right) \frac{h^3}{24}\right) + \mathrm{O}\left(h^5\right) \tag{2.30}$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc bốn nhận được từ phương trình (2.30) như sau:

$$y_{i+1} = y_i + \left(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4\right) h, \tag{2.31}$$

$$\sum a_i = 1$$

trong đó, $a_i$ là các trọng số; $k_i$ là các độ dốc được thể hiện trong Hình 2.6.

Phương pháp Runge-Kutta bậc bốn sau khi xác định các hệ số $a_i$ được viết lại như sau:

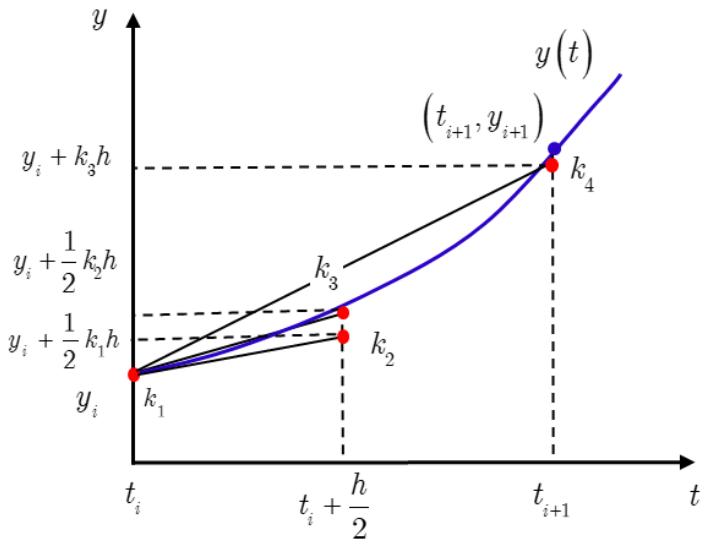
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) h \tag{2.32}$$

trong đó, $h$ là bước tính thời gian.

Các thành phần độ dốc được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_i, y_i\right) = \dot{y}\left(t_i\right) \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(t_i + h, y_i + k_3 h\right)
\end{aligned}
$$

Mô tả phương pháp Runge-Kutta bậc 4 trên phương diện hình học như sau:




***Hình 2.6:*** *Mô tả phương pháp Runge-Kutta bậc 4*

## 2.3. Các khái niệm cơ bản

Trong phần này trình bày các khái niệm cơ bản trong bài toán phân tích mất ổn định tĩnh và động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC.

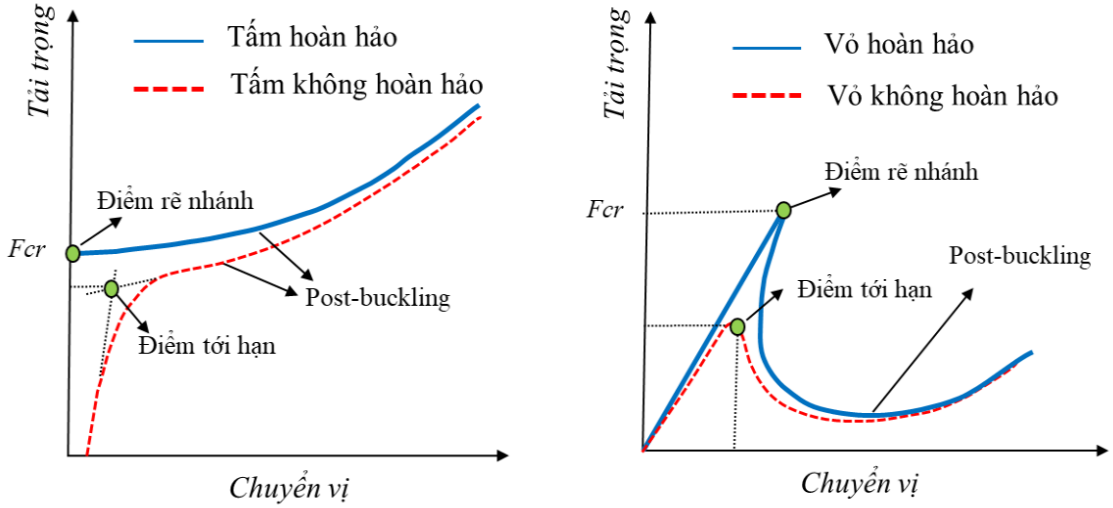
### *2.3.1. Phân tích mất ổn định*

Mất ổn định (Buckling) là ứng xử cơ học trong miền đàn hồi (mối quan hệ ứng suất-biến dạng là tuyến tính) thường xảy ra trong các kết cấu như tấm hoặc

vỏ, dưới tác dụng của tải trọng làm cho các kết cấu bị biến dạng bất thường hoặc mất khả năng chịu tải. Khi một kết cấu chịu tải trọng nén nó có thể bị uốn cong hoặc biến dạng, khi giá trị tải trọng tác dụng vượt quá một giới hạn cho phép ($Fcr$-giá trị tải tới hạn), kết cấu sẽ bị mất ổn định nghĩa là bị uốn cong hoặc biến dạng bất thường và không còn khả năng chịu tải như ban đầu.

Sau mất ổn định (Post-buckling) là trạng thái tiếp nối của trạng thái mất ổn định sau khi kết cấu đạt tới giá trị tới hạn, khả năng chịu tải có thể không thay đổi hoặc bắt đầu giảm dần, trong khi đó biến dạng vẫn tiếp tục tăng. Có thể coi trạng thái sau mất ổn định như là một dạng đặc biệt của ứng xử phi tuyến vật liệu xảy ra trong khoảng thời gian rất ngắn sau khi kết cấu vượt qua trạng thái tới hạn.

Trạng thái mất ổn định và sau mất ổn định của kết cấu tấm và vỏ được thể hiện trên phương diện hình học như Hình 2.7 thông qua biểu đồ quan hệ tải trọng và chuyển vị.




*(a). Kết cấu tấm* *(b). Kết cấu vỏ*

***Hình 2.7:*** *Đường cong tải trọng-chuyển vị của kết cấu chịu nén*

Phân tích mất ổn định kết cấu tấm, vỏ thường được chia làm hai bài toán chính:

- *Phân tích mất ổn định*: Phân tích mất ổn định (phân tích buckling) là bài toán xác định giá trị tải trọng tới hạn ($Fcr$) (điểm rẽ nhánh hoặc điểm tới hạn trên đường cong tải trọng - chuyển vị trong Hình 2.7) mà kết cấu có thể chịu và làm việc trong miền đàn hồi.

- *Phân tích sau tới hạn*: Phân tích sau tới hạn (phân tích post-buckling) là bài toán nghiên cứu trạng thái của kết cấu sau khi xảy ra sự mất ổn định, tập trung vào việc nghiên cứu mối liên hệ tải trọng - động võng.

### *2.3.2. Tần số riêng và dao động tự do*

Dao động tự do của một hệ xảy ra khi hệ đó không bị tác động bởi ngoại lực và xuất phát từ sự biến đổi của năng lượng có thể là động năng hoặc thế năng. Cụ thể, một hệ xảy ra dao động tự do là khi nó bị đẩy ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu và dao động mà không chịu ảnh hưởng từ các ngoại lực tác dụng.

Dao động tự do bỏ quả ảnh hưởng của lực cản được miêu tả bằng phương trình vi phân sau:

$$\mathbf{M}\ddot{u}(t) + \mathbf{K}u(t) = 0 \tag{2.33}$$

trong đó, $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của hệ. Phương trình (2.33) gồm $n$ phương trình vi phân thuần nhất với chuyển vị $u(t)$, gia tốc $\ddot{u}(t)$ .

Tần số riêng của hệ dao động tự do không cản thường được ký hiệu là $\omega_n$ và được xác định từ bài toán trị riêng của phương trình (2.33), như sau:

$$\left[\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M}\right]\phi_n = 0 \tag{2.34}$$

Hệ phương trình (2.34) là hệ phương trình thuần nhất luôn có nghiệm tầm thường với $\phi_n = 0$ tương ứng với trạng thái hệ không chuyển động. Tần số dao

động tự do của hệ được xác định bằng phương trình đặc trưng sau:

$$\left|\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}\right| = 0 \tag{2.35}$$

trong đó, $\omega_n$ là tần số riêng; $\phi_n$ là dạng dao động riêng xác định tương ứng với tần số riêng thay vào phương trình (2.34). Giá trị nhỏ nhất của tần số riêng được gọi là tần số cơ bản $\omega_0$ (fundamental frequency), dạng dao động riêng tương ứng $\phi_0$ được gọi là dạng dao động cơ bản của hệ.

### *2.3.3. Phân tích đáp ứng động lực học*

Đáp ứng động lực học (Dynamic response) là ứng xử của kết cấu phản ứng lại các tải trọng động tác dụng lên nó. Phân tích đáp ứng động là bài toán đánh giá các đại lượng đặc trưng của chuyển động (như chuyển vị, vận tốc và gia tốc) phụ thuộc vào thời gian dưới tác dụng của tải trọng động.

Tải trọng động là tải trọng có giá trị, phương chiều hay điểm tác dụng của nó biến đổi theo thời gian. Nếu sự thay đổi theo thời gian của tải trọng được biểu diễn bằng một hàm cụ thể được gọi là tải trọng xác định. Nếu sự thay đổi không được biểu diễn bằng hàm cụ thể mà là số liệu rời rạc thì được gọi là tải trọng bất kỳ. Tải trọng động được chia làm hai loại: tải trọng có chu kỳ và tải trọng không có chu kỳ:

- Tải trọng có chu kỳ là tải trọng mà sự biến thiên theo thời gian của nó sẽ lặp lại sau một khoảng thời gian $T$. Tải trọng có chu kỳ được chia thành hai loại: tải trọng điều hòa và tải trọng chu kỳ bất kỳ.
- Tải trọng không có chu kỳ là tải trọng biến đổi một cách bất kỳ theo thời gian. Tải trọng không có chu kỳ được chia thành tải trọng tác dụng ngắn hạn như tải trọng xung và tải trọng tác dụng dài hạn.

## 2.4. Các mô hình đồng nhất hoá FG-CNTRC

### *2.4.1. Các phương pháp xác định tính chất cơ học của vật liệu composite*

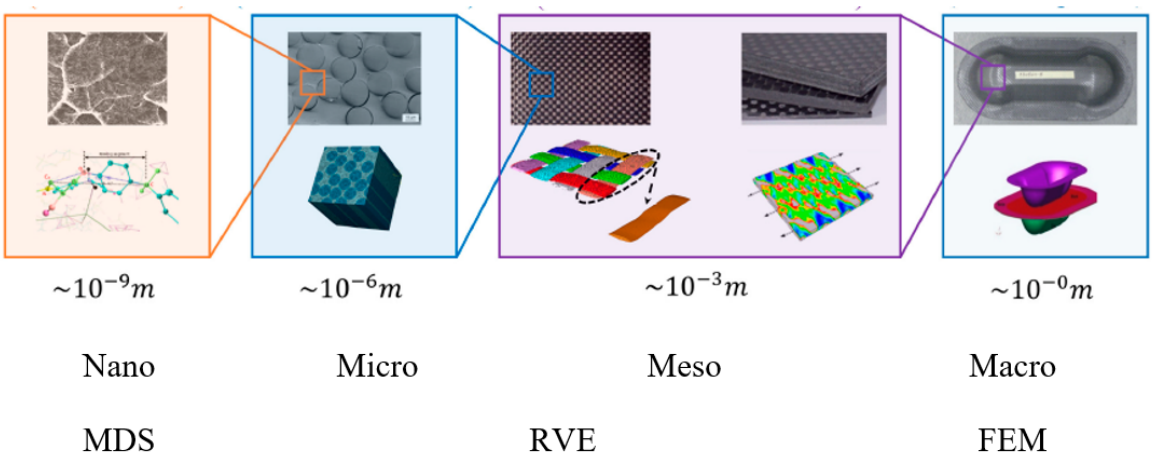
Tính chất cơ học của vật liệu composite phụ thuộc vào tỉ lệ thành phần vật liệu tạo nên composite. Phương pháp xác định tính chất vật liệu composite dựa trên tỉ lệ thể tích của các vật liệu thành phần được gọi là quy luật phối trộn (Rule of mixture).

Theo quy luật phối trộn, tính chất vật liệu composite được xác định như sau:

$$\begin{aligned} Pr_C &= Pr_M v_M + Pr_F v_F, \\ v_M + v_F &= 1 \end{aligned} \tag{2.36}$$

trong đó, $Pr$ đại diện cho các tính chất vật liệu cơ học (như module đàn hồi, hệ số Poisson...), $v$ đại diện cho tỉ lệ thể tích. Các ký hiệu hiệu chỉ số dưới $_C$, $_M$, $_F$ đại diện cho vật liệu composite, nền và sợi, tương ứng.

Các phương pháp mô phỏng để xác định tính chất cơ học của vật liệu composite được phân loại theo kích thước mô hình (từ kích thước nano tới kích thước macro).




***Hình 2.8:*** *Các phương pháp xác định tính chất vật liệu [28]*

Hình 2.8 thể hiện ba phương pháp mô phỏng phân loại theo kích thước mô hình. Trong đó, phương pháp lượng tử mô phỏng ở kích thước nano gồm phương pháp mô phỏng động học phân tử (MDS - Molecular Dynamics Simulation). Phương pháp phần tử thể tích đại diện (RVE - Representive Volume Element) mô phỏng ở kích thước micro. Phương pháp phần từ hữu hạn (Finite Element Method) xác định tính chất vật liệu bằng cách xét các thí nghiệm của mô hình ở kích thước macro.

### *2.4.2. Mô hình Halpin-Tsai*

Mô hình Halpin-Tsai được phát triển dựa trên quy luật phối trộn để xác định tính chất cơ học của vật liệu composite và được sử dụng cho nhiều loại vật liệu khác nhau trong đó có vật liệu FG-CNT.

Tỉ lệ thể tích CNT ở lớp thứ $k^{th}$ theo các mô hình phân bố được xác định như sau:

$$V_{CNT} = \begin{cases} V^*_{CNT} & \text{(UD)} \\ 2\left(\frac{|2k-N_L-1|}{N_L}\right) V^*_{CNT} & \text{(FG-X)} \\ 2\left(1-\frac{|2k-N_L-1|}{N_L}\right) V^*_{CNT} & \text{(FG-O)} \end{cases} \tag{2.37}$$

với $V^*_{CNT} = \frac{W_{CNT}}{W_{CNT}+(\rho_{CNT}/\rho_m)-(\rho_{CNT}/\rho_m)W_{CNT}}$, $N_L$ là số các lớp, $W_{CNT}$ tỉ lệ thể tích, các chỉ số dưới "$_{CNT}$" và "$_m$" đại diện cho vật liệu CNTs và vật liệu nền.

Tính chất vật liệu composite gia cường ống nano carbon sử dụng phương trình Halpin-Tsai [47, 48]:

$$\begin{gathered} E = \frac{3}{8}\left(\frac{1+2\left(l_{CNT}/d_{CNT}\right)\eta_L V_{CNT}}{1-\eta_L}\right)E_m + \frac{5}{8}\left(\frac{1+2\eta_D V_{CNT}}{1-\eta_D V_{CNT}}\right)E_m, \\ \eta_L = \frac{\left(E_{CNT}/E_m\right)-\left(d_{CNT}/4t_{CNT}\right)}{\left(E_{CNT}/E_m\right)+\left(l_{CNT}/2t_{CNT}\right)}, \eta_D = \frac{\left(E_{CNT}/E_m\right)-\left(d_{CNT}/4t_{CNT}\right)}{\left(E_{CNT}/E_m\right)+\left(d_{CNT}/2t_{CNT}\right)}. \end{gathered} \tag{2.38}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_m}{2}\left[V_c(1-v) + V_{CNT}(1+v_{CNT}) + V_m(1+v_m)\left(\frac{\alpha_{CNT}}{\alpha_m}\right)\right],$$
$$V_c = \frac{V_{CNT}E_{CNT}\left(\frac{\alpha_{CNT}}{\alpha_m}\right) + V_{CNT}E_m}{V_{CNT}E_{CNT} + V_mE_m} \tag{2.39}$$

trong đó, các ký hiệu $l_{CNT}$, $d_{CNT}$ và $t_{CNT}$ đại diện tương ứng cho chiều dài, đường kính và độ dày của ống nano carbon. $E_{CNT}$, $E_m$ là các module Young $V_{CNT}$, $V_m$ tương ứng là tỉ lệ thể tích của CNT và vật liệu nền.

***Bảng 2.1:*** *Tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ*

| Vật liệu | Tính chất | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gốm ($Si_3N_4$) | $E(Pa)$ | 384.43e9 | 0 | -3.07e-4 | 2.16e-7 | -8.946e-11 |
| | $\rho(kg/m^3)$ | 2370 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $\alpha(K^{-1})$ | 5.87e-6 | 0 | 9.095e-4 | 0 | 0 |
| | $v$ | 0.24 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Kim loại ($SUS304$) | $E(Pa)$ | 201.04e9 | 0 | 3.079e-4 | -6.534e-7 | 0 |
| | $\rho(kg/m^3)$ | 8166 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $\alpha(K^{-1})$ | 12.33e-6 | 0 | 8.086e-4 | 0 | 0 |
| | $v$ | 0.3262 | 0 | -2e-4 | 3.797e-7 | 0 |
| CNTs | $E(Pa)$ | 6.3998e12 | 0 | -6.779e-4 | 1.161e-6 | -6.966e-10 |
| | $\rho(kg/m^3)$ | 1350 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $\alpha(K^{-1})$ | -1.12515 | 0 | -2.037e-2 | 2.566e-5 | -1.01e-8 |
| | $v$ | 0.175 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Vật liệu nền có thể được lựa chọn là vật liệu đồng nhất hoặc vật liệu FGM tạo từ gốm và kim loại. Trong trường hợp, vật liệu nền là FGM, các tính chất vật liệu phụ thuộc theo tỉ lệ thể tích ($N$) [89] được xác định như sau:

$$P_m = P_{me} + (P_{ce} - P_{me})\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^N, -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2} \tag{2.40}$$

với $P_m$ đại diện cho module Young ($E_m$), hệ số Poisson ($v_m$), hệ số giãn nở nhiệt $\alpha_m$, mật độ khối lượng $\rho_m$, ký hiệu chỉ số dưới "$me$" và "$ce$" đại diện cho vật liệu gốm và kim loại, tương ứng.

Tính chất vật liệu $P_r$ của nền FGM và ống CNTs phụ thuộc nhiệt độ [87, 92]:

$$P_r\left(T\right) = c_0\left(c_{-1}T^{-1} + 1 + c_1T + c_2T^2 + c_3T^3\right) \tag{2.41}$$

với hệ số $c_i$ trình bày trong Bảng 2.1.

### *2.4.3. Mô hình vật liệu của Shen*

Trong khi mô hình Halpin-Tsai dành cho vật liệu CNT phân bố hỗ độn, còn mô hình vật liệu được đề suất bởi tác giả Shen [92] là dành cho vật liệu CNT phân bố đồng phương với tính chất vật liệu FG-CNTRC được xác định dựa trên quy luật phối trộn kết hợp với phương pháp mô phỏng MD như sau:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m, \\ \frac{\eta_2}{E_{22}} &= \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m}, \\ \frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

trong đó, $E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$ là các module Young và module cắt của ống nano carbon đơn vách (10,10) (SWCNTs) với giá trị thể hiện trong Bảng 2.2.

***Bảng 2.2:*** *Tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ của (10, 10) SWCNTs*

| $T$ (K) | $E_{11}$ (GPa) | $E_{22}$ (GPa) | $E_{12}$ (GPa) | $G_{12}$ (GPa) | $G_{23}$ (GPa) |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 5.6466 | 7.0800 | 1.9445 | 3.4584 | 5.1682 |
| 400 | 5.5679 | 6.9814 | 1.9703 | 4.1496 | 5.0905 |
| 500 | 5.5308 | 6.9348 | 1.9643 | 4.5361 | 5.0189 |
| 700 | 5.4744 | 6.8641 | 1.9644 | 4.6677 | 4.8943 |
| 1000 | 5.2814 | 6.6220 | 1.9451 | 4.2800 | 4.7532 |

Vật liệu composite được chọn gồm hai loại nền polymer là nền Poly Methyl MethAcrylate (PMMA) và nền Poly(m-PhenyleneVinylene)-co-[(2,5-dioctoxy-p-phenylene)vinylene] (PmPV) với tính chất được thể hiện trong Bảng 2.3.

***Bảng 2.3:*** *Tính chất vật liệu nền phụ thuộc nhiệt độ*

| Nền | $E_m\,(GPa)$ | $v_m$ | $\alpha_m(\times 10^{-6}/K)$ |
|---|---|---|---|
| PMMA | $(3.52 - 0.0034\Delta\mathrm{T})$ | 0.34 | $45\,(1 + 0.0005\Delta\mathrm{T})$ |
| PmPV | $(3.51 - 0.0047\Delta\mathrm{T})$ | 0.34 | $45\,(1 + 0.0005\Delta\mathrm{T})$ |

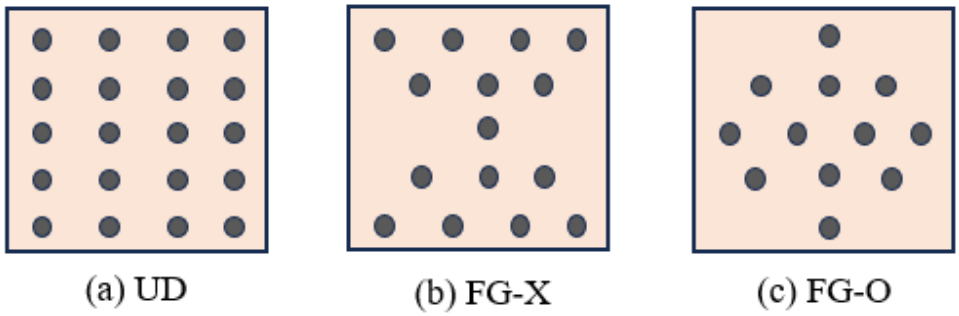
Hệ số hiệu chỉnh $\eta_i (i = 1, ..., 3)$ trong phương trình (2.42) tương ứng cho từng loại nền và tỉ lệ thể tích CNT xác định trong Bảng 2.4.

***Bảng 2.4:*** *Hệ số hiệu chỉnh cho kết cấu composite gia cường ống nano carbon*

| Loại composite | $V^*_{CNT}$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\eta_3$ |
|---|---|---|---|---|
| PMMA/CNT | 0.12 | 0.137 | 1.022 | 0.715 |
| | 0.17 | 0.142 | 1.626 | 1.138 |
| | 0.28 | 0.141 | 1.585 | 1.110 |
| PmPV/CNT | 0.11 | 0.149 | 0.934 | 0.654 |
| | 0.14 | 0.150 | 0.941 | 0.659 |
| | 0.17 | 0.149 | 1.381 | 0.967 |

Ống CNT phân bố đều (UD) hoặc biến đổi tuyến tính theo chiều dày (FG) với các mô hình phân bố CNT như trong Hình 2.9 và công thức sau:

$$V_{CNT} = \begin{cases} V^*_{CNT} & (\mathrm{UD}) \\ 4V^*_{CNT}\frac{|z|}{h} & (\mathrm{FG\text{-}X}), \\ 2V^*_{CNT}\left(1 - 2\frac{|z|}{h}\right) & (\mathrm{FG\text{-}O}) \end{cases} \quad V_m = 1 - V_{CNT}. \tag{2.43}$$




***Hình 2.9:*** *Sự phân bố CNT qua chiều dày kết cấu (a) Phân bố đều (UD), (b) Tỉ lệ thể tích CNT lớn nhất ở mặt ngoài (FG-X), (c) Tỉ lệ thể tích CNT lớn nhất ở mặt giữa (FG-O)*

## 2.5. Kết luận chương 2

Các lý thuyết và phương pháp áp dụng cho phân tích mất ổn định và động lực học phi tuyến của tấm và vỏ FG-CNTRC đã trình bày gồm những giả thiết cơ bản của các lý thuyết tấm vỏ từ lý thuyết cổ điển tới lý thuyết biến dạng cắt bậc cao; nguyên lý công ảo, nguyên lý Hamilton làm cơ sở xây dựng phương trình cân bằng và chuyển động của tấm và vỏ FG-CNTRC; phương pháp Galerkin giải phương trình đạo hàm riêng; phương pháp Runge-Kutta bậc 4 giải phương trình vi phân chuyển động; các mô hình đồng nhất hoá vật liệu FG-CNTRC; các khái niệm cơ bản về bài toán phân tích mất ổn định và động lực học của tấm và vỏ FG-CNTRC.

# CHƯƠNG 3. PHÂN TÍCH MẤT ỔN ĐỊNH CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC

## 3.1. Phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC

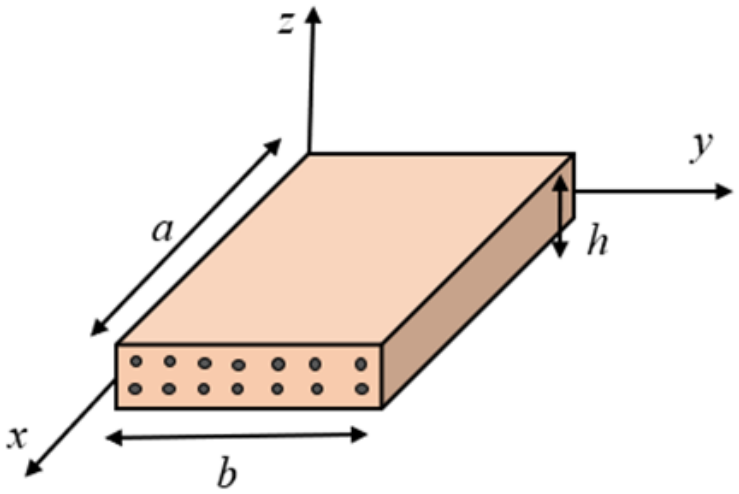
Trong phần này trình bày kết quả phân tích mất ổn định của tấm nanocomposite gia cường ống nano carbon có cơ tính biến thiên chịu tác dụng của tải trọng nén đều và không đều (tải trọng hình parabol và hình sin). Phương pháp bán giải tích và phương pháp mô phỏng được sử dụng để phân tích bài toán này. Cụ thể như sau:

- *Phương pháp bán giải tích*: Thiết lập các phương trình cân bằng của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 kết hợp với tính phi tuyến hình học von Kármán dựa trên nguyên lý công ảo (Nội dung trình bày ở Chương 2). Sau đó, các phương trình này được thiết lập ở dạng phương trình đạo hàm riêng theo tọa độ và được giải bằng việc kết hợp các phương pháp Galerkin, hàm ứng suất Airy, và cân bằng điều hòa. Mục đích xác định giá trị tải trọng tới hạn và mối quan hệ tải trọng - độ võng.

- *Phương pháp mô phỏng*: Xây dựng mô hình phần tử hữu hạn 3D và một chương trình con USDFLD viết trên FORTRAN sau đó đưa vào ABAQUS để mô phỏng sự phân bố của các ống nano carbon biến thiên theo chiều dày của tấm nhắm mục đích xác định giá trị tải trọng tới hạn. Kết quả hệ số tải tới hạn được so sánh với phương pháp bán giải tích.

### *3.1.1. Các phương trình cơ bản của tấm FG-CNTRC*

Mô hình tấm FG-CNTRC với mô hình vật liệu của Shen như phương trình (2.42) có chiều dài $a$ và chiều rộng $b$ và chiều dày $h$ được thể hiện trên Hình 3.1. Hệ trục tọa độ ($x$, $y$, $z$) với mặt phẳng ($x$, $y$) là mặt giữa của tấm và chiều $z$ theo chiều dày của tấm.




***Hình 3.1:*** *Mô hình tấm FG-CNTRC*

Các thành phần chuyển vị $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ tương ứng theo các trục $x, y, z$ dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 của Reddy, được xác định theo công thức sau:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,z,t) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,z,t) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó, $u_0(x,y,t)$,$v_0(x,y,t)$,$w_0(x,y,t)$ là chuyển vị tại mặt giữa, $\phi_x(x,y,t) = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}$, $\phi_y(x,y,t) = \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0}$ là góc quay tương ứng tại $z = 0$.

Mối quan hệ của các thành phần biến dạng và chuyển vị của tấm có xét tới tính phi tuyến hình học Von-Kármán được xác định như sau [87]:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Thay các thành phần chuyển vị trong phương trình (3.1) vào phương trình (3.2) nhận được:

$$\varepsilon=\varepsilon^0+zk^1+z^3k^3,\gamma=\gamma^0+z^2k^2 \tag{3.3}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0&=\begin{pmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{pmatrix},\gamma^0=\begin{pmatrix}\gamma_{xz}^0\\ \gamma_{yz}^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\\ \phi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{pmatrix}\\
k^1&=\begin{pmatrix}k_x^1\\ k_y^1\\ k_{xy}^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\end{pmatrix},k^2=\begin{pmatrix}k_{xz}^2\\ k_{yz}^2\end{pmatrix}=-c_2\begin{pmatrix}\phi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\\ \phi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{pmatrix},\\
k^3&=\begin{pmatrix}k_x^3\\ k_y^3\\ k_{xy}^3\end{pmatrix}=-c1\begin{pmatrix}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\end{pmatrix},c_1=\frac{4}{3h^2},c_2=3c_1
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Định luật Hooke cho quan hệ ứng suất - biến dạng của tấm FG-CNTRC theo mô hình vật liệu của Shen (phương trình 2.42) trong môi trường nhiệt được xác định như sau:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0&0&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0&0&0\\ 0&0&Q_{66}&0&0\\ 0&0&0&Q_{44}&0\\ 0&0&0&0&Q_{55}\end{bmatrix}\left\{\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}-\Delta T\begin{Bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\right\} \tag{3.5}$$

trong đó, $Q_{11} = \frac{E_{11}}{1-v_{12}v_{21}}, Q_{12} = \frac{v_{12}E_{22}}{1-v_{12}v_{21}}, Q_{22} = \frac{E_{22}}{1-v_{12}v_{21}}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13}, Q_{66} = G_{12}$.

Các phương trình chuyển động (cân bằng) của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton [87] như sau:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K)\, dt = 0 \tag{3.6}$$

Công ảo của năng lượng biến dạng đàn hồi xác định như sau:

$$\delta U = \int_V \sigma\, \delta\varepsilon dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}\right) dz dA \tag{3.7}$$

Thay phương trình (3.3) vào phương trình (3.7) nhận được:

$$\delta U = \int_A \left( \begin{array}{l} N_x \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right)\right) + M_x \frac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} - c_1 P_x \left(\frac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\right) \\ +N_y \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right)\right) + M_y \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} - c_1 P_y \left(\frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}\right) \\ +N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right)\right) \\ -c_1 P_{xy} \left(\frac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + 2\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right) \\ +M_{xy} \left(\frac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial x}\right) + Q_{xz} \left(\delta\phi_x + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right) - c_2 K_{xz} \left(\delta\phi_x + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x}\right) \\ +Q_{yz} \left(\delta\phi_y + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right) - c_2 K_{yz} \left(\delta\phi_y + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y}\right) \end{array} \right) dA \tag{3.8}$$

trong đó,

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, P_i) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i \left(1, z, z^3\right) dz, \quad \{i = x, y, xy\} \\ (Q_i, K_i) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i \left(1, z^2\right) dz, \qquad \{i = xz, yz\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Thay phương trình (3.3) và phương trình (3.5) vào phương trình (3.9), xác

định được các thành phần lực và moment được biểu diễn như sau:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [D] \\ [B] & [C] & [E] \\ [D] & [E] & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k^1 \\ k^3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^{th} \\ M^{th} \\ P^{th} \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$
$$\begin{Bmatrix} Q \\ K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_s] & [C_s] \\ [C_s] & [E_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ k^2 \end{Bmatrix}$$

trong đó,

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, [E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{12} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix},$$

$$[A_s] = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix}, [C_s] = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}, [E_s] = \begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix}$$

$$\left\{N^{th}\right\} = \left[N_x^{th}, N_y^{th}, 0\right]^T, \left\{M^{th}\right\} = \left[M_x^{th}, M_y^{th}, 0\right]^T, \left\{P^{th}\right\} = \left[P_x^{th}, P_y^{th}, 0\right]^T$$

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\right) dz, \ (\ i, j = 1, 2, 6)$$

$$\left(A_{sij}, C_{sij}, E_{sij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\left(1, z^2, z^4\left(z\right)\right) dz, \ \left(\ ij = 44, 55\right),$$

$$(N_x^{th}, M_x^{th}, P_x^{th}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11}\alpha_{11} + Q_{12}\alpha_{22})\,\Delta T\left(1, z, z^3\right) dz$$

$$(N_y^{th}, M_y^{th}, P_y^{th}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{12}\alpha_{11} + Q_{22}\alpha_{22})\,\Delta T\left(1, z, z^3\right) dz$$

Công ảo của ngoại lực thực hiện bởi lực phân bố đều và lực nền đàn hồi được xác định như sau:

$$\delta V = -\int_A (q\delta w_0 - q_e\delta w_0)\, dA \tag{3.11}$$

Công ảo của động năng:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_V \rho\dot{u}\delta\dot{u}dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_z \left(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}\right) dzdA \\
&= \int_A \left( \begin{array}{l}
I_0\dot{w}_0\delta\dot{w}_0 + \left(I_0\dot{u}_0 + I_1\dot{\phi}_x - c_1 I_3\left(\dot{\phi}_x + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right)\delta\dot{u}_0 \\
+ \left(I_1\dot{u}_0 + I_2\dot{\phi}_x - c_1 I_4\left(\dot{\phi}_x + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right)\delta\dot{\phi}_x \\
- \left(c_1 I_3\dot{u}_0 + c_1 I_4\dot{\phi}_x - {c_1}^2 I_6\left(\dot{\phi}_x + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right)\left(\delta\dot{\phi}_x + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\right) \\
+ \left(I_0\dot{v}_0 + I_1\dot{\phi}_y - c_1 I_3\left(\dot{\phi}_y + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right)\delta\dot{v}_0 \\
+ \left(I_1\dot{v}_0 + I_2\dot{\phi}_y - c_1 I_4\left(\dot{\phi}_y + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right)\delta\dot{\phi}_y \\
- \left(c_1 I_3\dot{v}_0 + c_1 I_4\dot{\phi}_y - c_1^2 I_6\left(\dot{\phi}_y + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right)\left(\delta\dot{\phi}_y + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right)
\end{array} \right) dA
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Trong đó, các moment quán tính được xác định như sau:

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_z z^i dz \quad (i = 0, ..., 6) \tag{3.13}$$

Thay các phương trình (3.8), (3.11), và (3.12) vào phương trình (3.6) theo nguyên lý Hamilton sử dụng tích phân từng phần cho từng số hạng là vi phân

theo tọa độ hoặc thời gian nhằm mục đích hạ bậc vi phân của chuyển vị ảo về thành chuyển vị ảo. Các đại lượng lấy cận tích phân theo tọa độ là các điều kiện biên về lực trên biên. Các biểu thức trước các chuyển vị ảo là phương trình chuyển động Euler-Lagrange cần tìm, số phương trình thu được tương ứng với số chuyển vị ảo như sau:

$$
\begin{aligned}
&\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - c_1 I_3 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \\
&\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - c_1 I_3 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \\
&\delta w_0 : \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ +c_1\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - c_2\left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y}\right) + q \\ -K_w w_0 + K_p\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + c_1 I_3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial y \partial t^2}\right) \\ +c_1 J_4\left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial y \partial t^2}\right) - c_1^2 I_6\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2}\right) \end{array} \\
&\delta \phi_x : \begin{array}{l} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - c_1\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y}\right) - Q_x + c_2 R_x = J_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ +K_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - c_1 J_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \end{array} \\
&\delta \phi_y : \begin{array}{l} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - c_1\left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y}\right) - Q_y + c_2 R_y = J_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ +K_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - c_1 J_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \end{array}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

trong đó,

$$
I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^i dz,\ J_i = I_i - c_1 I_{i+2},\ K_2 = I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6,\ (i = 0\,,...,6)
$$

Trong luận án này giải bài toán tấm vỏ theo phương pháp hàm ứng suất, biểu diễn các thành phần nội lực qua một hàm ứng suất Airy $f(x, y, t)$ như sau:

$$
N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ N_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ N_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{3.15}
$$

Để xác định nghiệm hàm ứng suất cần xét điều kiện tương thích biến dạng của tấm như sau:

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{3.16}
$$

### *3.1.2. Phương pháp bán giải tích*

Các phương trình cơ bản của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 đã được thiết lập trong phần trước gồm phương trình cân bằng thu được từ việc bỏ qua thành phần lực quán tính trong phương trình (3.14), phương trình tương thích biến dạng (3.16).

Phương trình tương thích biến dạng của tấm được viết lại theo hàm ứng suất $f(x,y)$ như sau:

$$\begin{aligned}
&A_{11}^{*}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+A_{22}^{*}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}+\left(-2A_{12}^{*}+A_{66}^{*}\right)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\\
&+\left(-D_{11}^{*}c_1+B_{11}^{*}\right)\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3}+\left(D_{21}^{*}c_1-D_{66}^{*}c_1-B_{21}^{*}+B_{66}^{*}\right)\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x\partial y^2}\\
&+\left(-D_{12}^{*}c_1-D_{66}^{*}c_1+B_{12}^{*}+B_{66}^{*}\right)\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2\partial y}+\left(D_{22}^{*}c_1-B_{22}^{*}\right)\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3}\\
&-D_{11}^{*}c_1\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+D_{22}^{*}c_1\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+\left(\ -D_{12}^{*}c_1+D_{12}^{*}c_1-2D_{66}^{*}c_1\ \right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\\
&=\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

trong đó, các hệ số $A_{ij}^{*}, B_{ij}^{*}, D_{ij}^{*}$ được trình bày trong Phụ lục A.1.

Phương trình cân bằng viết theo hàm ứng suất $f(x,y,t)$ xác định như sau:

$$\begin{aligned}
&G_{11}\left(w_0\right)+G_{12}\left(\phi_x\right)+G_{13}\left(\phi_y\right)+G_{14}(f)+S\left(w_0,f\right)=0\\
&G_{21}\left(w_0\right)+G_{22}\left(\phi_x\right)+G_{23}\left(\phi_y\right)+G_{24}\left(f\right)=0\\
&G_{31}\left(w_0\right)+G_{32}\left(\phi_x\right)+G_{33}\left(\phi_y\right)+G_{34}\left(f\right)=0
\end{aligned}\tag{3.18}$$

trong đó, các hệ số $G_{ij}(i=1,2,3;j=1,...,4)$ được trình bày trong Phụ lục A.1.

Hai phương trình (3.17) và (3.18) là của bài toán phân tích mất ổn định tĩnh của tấm FG-CNTRC nhằm xác định giá trị tải trọng tới hạn và mối quan hệ của tải trọng và độ võng. Điều kiện biên tựa đơn tất cả các cạnh (SSSS) của bài toán này được xác đinh trong phương trình (3.19) với dạng nghiệm của hàm độ võng và góc quay như phương trình (3.20).

Điều kiện biên tựa đơn (SSSS) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 được xác

định cho các thành phần chuyển vị từ phương trình (3.1) là:

$$\begin{aligned}
&\text{Tại } x = 0, a: \\
&w_0 = 0, v_0 = 0, w_{,x} = 0, w_{,y} = 0, \phi_x = 0, \phi_y = 0, N_{xy} = 0, N_x = N_{x0}. \\
&\text{Tại } y = 0, b: \\
&w_0 = 0, u_0 = 0, w_{,x} = 0, w_{,y} = 0, \phi_x = 0, \phi_y = 0, N_{xy} = 0, N_y = N_{y0}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Nghiệm xấp xỉ thỏa mãn điều kiện biên tựa đơn tất cả các cạnh (phương trình 3.19) được tìm là:

$$\begin{bmatrix} w(x,y,t) \\ \phi_x(x,y,t) \\ \phi_y(x,y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) \sin\lambda_m x \sin\delta_n y \\ \Phi_x(t) \cos\lambda_m x \sin\delta_n y \\ \Phi_y(t) \sin\lambda_m x \cos\delta_n y \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

trong đó, $\lambda_m = m\pi/a$,$\delta_n = n\pi/b$, và $W(t), \Phi_x(t), \Phi_y(t)$ là biên độ của chuyển vị và góc quay, tương ứng.

Dạng nghiệm hàm ứng suất $f(x,y)$ được tìm từ việc thoả mãn điều kiện biên SSSS (phương trình 3.19) và phương trình tương thích biến dạng (phương trình 3.17) dựa trên phương pháp cân bằng điều hòa bằng cách thay dạng nghiệm ở phương trình (3.20), cụ thể như sau:

$$f(x,y) = F_0 + F_1 \cos 2\lambda_m x + F_2 \cos 2\delta_n y + F_3 \sin\lambda_m x \sin\delta_n y \tag{3.21}$$

trong đó, $F_0$ được xác định cho tải nén đều dọc trục $F_0 = \frac{1}{2}N_{xo}y^2 + \frac{1}{2}N_{yo}x^2$; tải nén dọc trục không đều parabol $F_0 = 6N_{xo}\left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right) + 6N_{yo}\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Các giá trị hệ số $F_i$ trong phương trình nghiệm (3.21) tìm được bằng cách thay phương trình (3.21) vào phương trình tương thích biến dạng của tấm (phương trình 3.16) và sử dụng phương pháp cân bằng điều hòa.

$$F_1 = \frac{\beta^2}{32A_{11}^*\alpha^2}W^2, F_2 = \frac{\alpha^2}{32\beta^2 A_{22}^*}W^2, F_3 = \frac{F_{31}}{F_D}\Phi_x + \frac{F_{32}}{F_D}\Phi_y + \frac{F_{33}}{F_D}W \tag{3.22}$$

với,

$$
\begin{aligned}
F_D &= \left(A_{11}^{*}\alpha^4 - 2A_{12}^{*}\alpha^2\beta^2 + A_{22}^{*}\beta^4 + A_{66}^{*}\alpha^2\beta^2\right)\\
F_{31} &= \left(\alpha^3 c_1 D_{11}^{*} - \alpha\beta^2 c_1 D_{21}^{*} + \alpha\beta^2 c_1 D_{66}^{*} - \alpha^3 B_{11}^{*} + \alpha\beta^2 B_{21}^{*} - \alpha\beta^2 B_{66}^{*}\right)\\
F_{32} &= \left(\alpha^2\beta c_1 D_{12}^{*} - \beta^3 c_1 D_{22}^{*} + \alpha^2\beta c_1 D_{66}^{*} - \alpha^2\beta B_{12}^{*} + \beta^3 B_{22}^{*} - \alpha^2\beta B_{66}^{*}\right)\\
F_{33} &= c_1\left(D_{11}^{*}\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 D_{12}^{*} - \alpha^2\beta^2 D_{21}^{*} - D_{22}^{*}\beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 D_{66}^{*}\right)
\end{aligned}
$$

Thay phương trình (3.21) vào phương trình (3.18) và áp dụng điều kiện của phương pháp Galerkin (trình này trong Chương 2), thu được kết quả phương trình sau:

$$
\begin{aligned}
&K_1^1 W + K_1^2 W^2 + K_1^3 W^3 + K_1^4\Phi_x + K_1^5\Phi_y + K_1^6\Phi_x(W)\\
&+ K_1^7\Phi_y(W) + N_{x0}K_1^8 = 0\\
&K_2^1 W + K_2^2 W^2 + K_2^3\Phi_x + K_2^4\Phi_y = 0\\
&K_3^1 W + K_3^2 W^2 + K_3^3\Phi_x + K_3^4\Phi_y = 0
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

trong đó, các hệ số $K_{ij}(i = 1, 2, 3; j = 1, ..., 8)$ được trình bày trong Phụ lục A.1.

Từ hai phương trình cuối của hệ phương trình (3.23) rút giá trị $\Phi_x, \Phi_y$ và thay vào phương trình đầu nhận được phương trình sau đây:

$$
o_1 W + o_2 W^2 + o_3 W^3 + o_4 W N_{x0} = 0 \tag{3.24}
$$

trong đó, các hệ số $o_i(i = 1, ..., 4)$ được trình bày trong Phụ lục A.1.

Phương trình liên hệ giữa tải trọng nén dọc trục và độ võng được xác định như sau ($N_{x0} = -F_x h$):

$$
F_x = \frac{\bar{o}_1 + \bar{o}_2\bar{W} + \bar{o}_3\bar{W}^2}{\bar{o}_4} \tag{3.25}
$$

với, $\bar{W} = \frac{W}{h}, \bar{o}_1 = o_1 h, \bar{o}_2 = o_2 h^2, \bar{o}_3 = o_3 h^3, \bar{o}_4 = o_4 h$.

Từ phương trình (3.25) với $W \to 0$ thu được biểu thức tải mất ổn định như sau:

$$
F_{mn} = \frac{\bar{o}_1}{\bar{o}_4} \tag{3.26}
$$

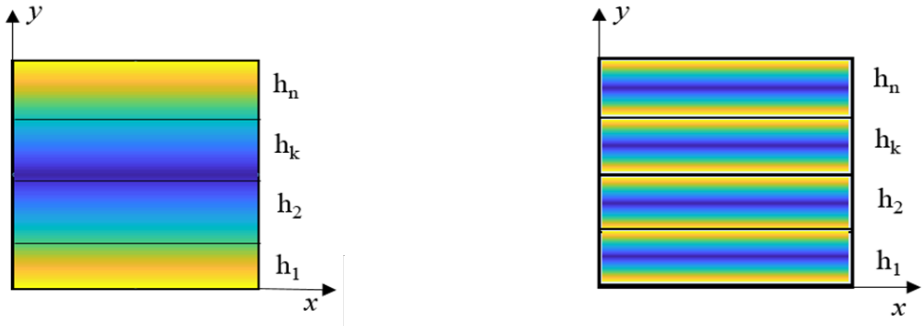
Giá trị tải trọng tới hạn $F_{cr}$ là giá trị nhỏ nhất của tải mất ổn định trong phương trình trên phụ thuộc vào sự thay đổi của mode mất ổn định $(m, n)$.

Phương trình (3.25) và (3.26) được sử dụng để phân tích cho bài toán mất ổn định của tấm FG-CNTRC nhằm xác định giá trị tải trọng tới hạn $F_{cr}$ và mối quan hệ giữa tải trọng và động võng.

### *3.1.3. Phương pháp mô phỏng*

Phần này trình bày mô hình FEM 3D của tấm FG-CNTRC nhiều lớp trong ABAQUS và xây dựng một chương trình con USDFLD được viết trên FORTRAN để mô tả sự phân bố CNT biến đổi tuyến tính theo chiều dày tấm. Sau đó, áp dụng mô mình này cho phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC xác định giá trị tải trọng tới hạn và so sánh với phương pháp bán giải tích.

Phân tích hai mô hình phân bố các ống nano carbon trong tấm composite nhiều lớp như trong Hình 3.2: (a) Sự phân bố tuyến tính của CNT trong mỗi lớp tạo ra tấm composite nhiều lớp có CNT phân bố biến đổi chức năng theo chiều dày trong toàn bộ tấm (Mô hình 1). (b) Sự phân bố của CNT biến đổi theo chiều dày trong từng lớp của tấm composite nhiều lớp (Mô hình 2).

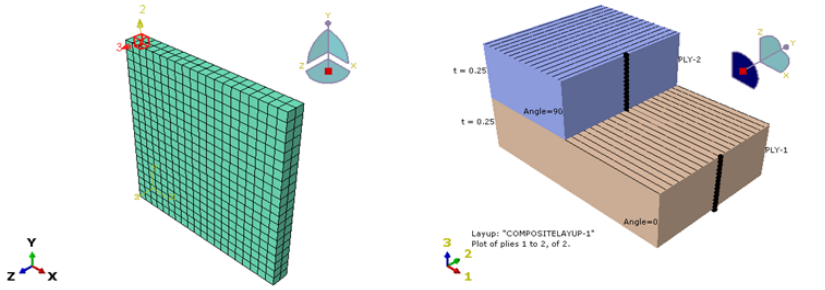



*(a). Mô hình I: FG-X* *(b). Mô hình II: FG-X*

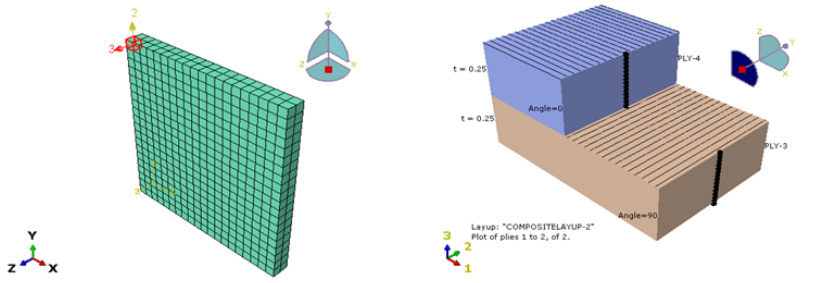
***Hình 3.2:*** *Mặt cắt tấm composite nhiều lớp với hai mô hình phân bố CNT*

Xét tấm có chiều dài $a$, chiều rộng là $b$ với kích thước $a = b = 10$ và độ dày là $h = 1$, phần tử C3D8 (phần tử khối lập phương lục diện) chia thành 20 phần tử

mỗi mặt và 2 phần tử dọc theo chiều dày, được rời rạc hóa với 1323 node. Mặt cắt của các phần tử khối được giả định được tạo thành từ hai lớp vật liệu, có độ dày bằng 0.25 và 15 điểm tích phân. Vật liệu tạo nên các lớp được coi là đàn hồi tuyến tính, với sự phân bố biến đổi chức năng của CNT theo chiều dày của tấm nhiều lớp. Sự phân bố này được xác định thông qua việc sử dụng chương trình con USDFLD với biến định nghĩa trong chương trình con USDFLD là tỉ lệ thể tích của CNT tương ứng với sự biến đổi của các đặc tính vật liệu theo chiều dày.




*(a). Lớp 1 và 2*



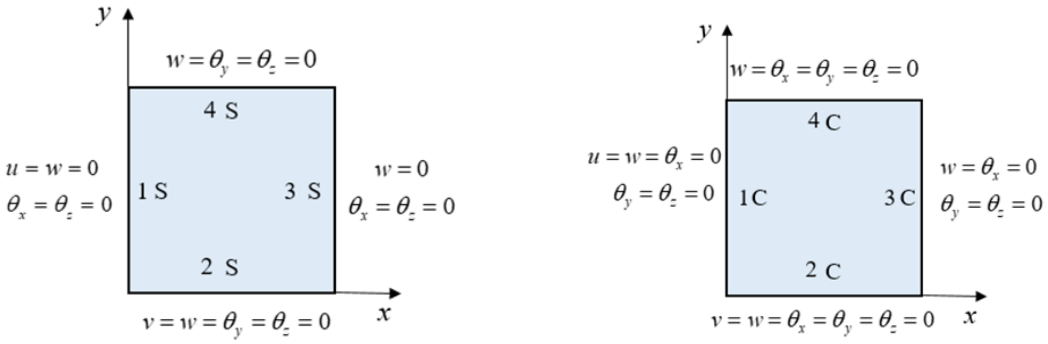

*(b). Lớp 3 và 4*

***Hình 3.3:*** *Mô hình phần tử hữu hạn của tấm*

Mô hình và mặt cắt của tấm được thể hiện trong Hình 3.3. Trong hình này, tấm gồm 4 lớp composite đươc trình bày thành hai hình gồm lớp 1 và 2 (Hình 3.2a) và lớp 3 và 4 (Hình 3.2b) các sợi được hiển thị bằng các đường thẳng mảnh màu đen, trong khi đó các điểm tích phân (15 điểm) thì biểu thị dưới dạng các chấm đen đậm dọc theo độ dày của mỗi lớp.

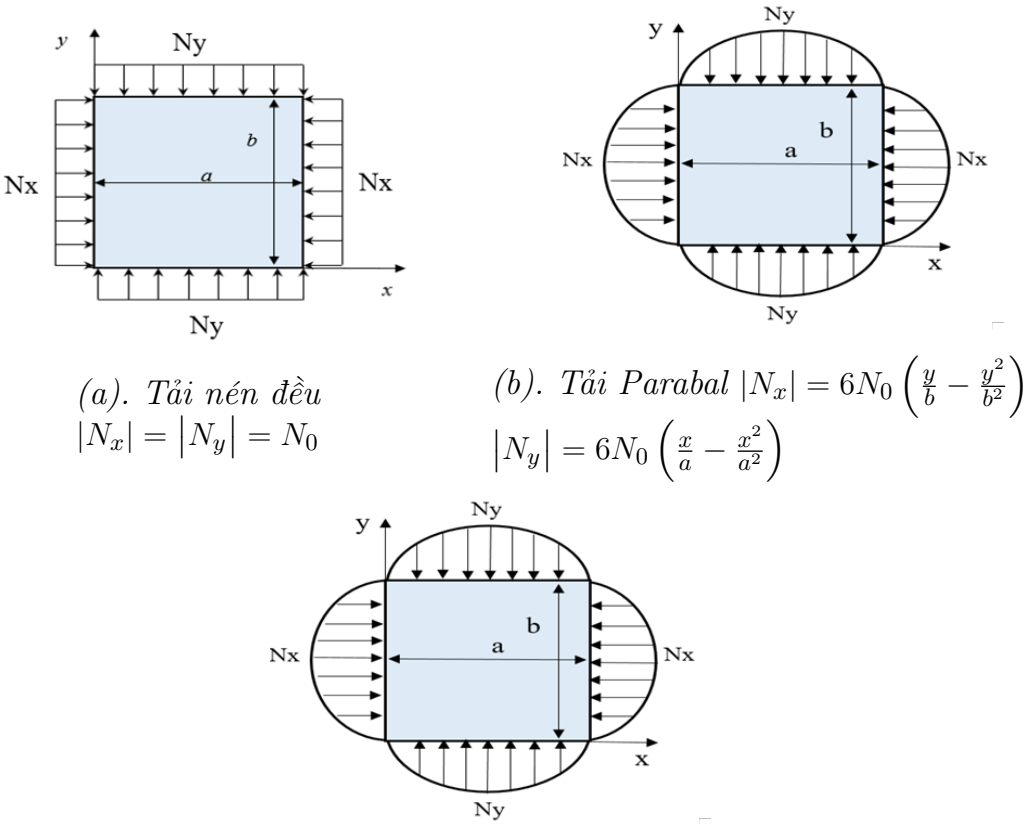
Các tải trọng phân bố được đặt như tải tập trung vào từng node của mặt

giữa trên các cạnh biên của tấm. Điều kiện biên cũng được đặt tại các nút trên biên. Mô hình điều kiện biên và tải trọng được trình bày trong Hình 3.4 và 3.5.




*(a). Tựa đơn các cạnh - SSSS* *(b). Ngàm các cạnh - CCCC*

***Hình 3.4:*** *Điều kiện biên của tấm*




*(a). Tải nén đều* $|N_x| = |N_y| = N_0$

*(b). Tải Parabal* $|N_x| = 6N_0\left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right)$, $|N_y| = 6N_0\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)$

*(c). Tải hình sin* $|N_x| = \frac{\pi}{2}N_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$, $|N_y| = \frac{\pi}{2}N_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$

***Hình 3.5:*** *Mô hình phân bố của các loại tải trọng*

### *3.1.4. Kết quả và thảo luận*

#### *3.1.4.1. Kết quả so sánh*

Trong phần này, các kết quả so sánh mô hình phần tử hữu hạn (FEM) sử dụng chương trình con USDFLD mô tả sự phân bố biến đổi chức năng theo chiều dày của các ống CNT và phương pháp bán giải tích cho bài toán mất ổn định của tấm FG-CNTRC đơn lớp chịu tải parabol trong Bảng 3.1 cho hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr} = \frac{F_{cr}b^2}{(\pi^2 D_m)}, D_m = \frac{E_m h^3}{12\left(1-v_{12}^2\right)}$ với thông số $b/h = 50, a = b = 1, V_{CNT}^* = 0.17$.

Trong Bảng 3.2 và 3.3 so sánh hệ số tải trọng tới hạn của tấm FG-CNTRC nhiều lớp tựa đơn 4 cạnh chịu tải parabol và tải tuần hoàn. Thông số trong Bảng 3.2 là $V_{CNT}^* = 0.28, b/h = 10, a = b$ và Bảng 3.3 là $V_{CNT}^* = 0.17, b/h = 10, a = b$

Từ kết quả các bảng này, giá trị hệ số tải trọng tới hạn sử dụng cả hai phương pháp gần với các kết quả của Kiani [58] (tấm composite gia cường FG-CNT dưới tải trọng parabol) và Adhikari và Singh [10] (tấm composite gia cường FG-CNT nhiều lớp chịu tải nén dọc trục 2 và 4 cạnh không đều (tải parabol và tải tuần hoàn).

***Bảng 3.1:*** *Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm đơn lớp SSSS gia cường FG-CNT*

| Loại phân bố CNT | Tài liệu [58] | Tài liệu [10] | Luận án (FEM) | Luận án (Giải tích) |
|---|---|---|---|---|
| UD | 59.1919 (1.51%)* | 59.1758 (1.54%) | 60.3467 (0.41%) | 60.0992 |
| FG-X | 84.3870 (2.31%) | 84.3354 (2.37%) | 84.9354 (1.68%) | 86.3828 |
| FG-O | 33.0091 (0.97%) | 33.2042 (0.38%) | 33.9470 (1.84%) | 33.3321 |

* giá trị sai khác (%) với kết quả của luận án theo phương pháp giải tích.

***Bảng 3.2:*** *Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp SSSS gia cường FG-CNT chịu tải parabol ($V^*_{CNT} = 0.28, b/h = 10, a = b$)*

| Tải trọng | Nén 2 cạnh | | Nén 4 cạnh | |
|---|---|---|---|---|
| | UD | FG-X | UD | FG-X |
| Tài liệu [10] | 50.1738 | 53.4266 | 25.0611 | 26.6916 |
| Luận án (FEM) | 50.8963 | 53.1447 | 25.2823 | 26.4224 |
| Sai khác (%) | 1.42(%) | 0.53(%) | 2.06(%) | 1.02(%) |

***Bảng 3.3:*** *Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp SSSS gia cường FG-CNT chịu tải parabol và tải tuần hoàn ($V^*_{CNT} = 0.17, b/h = 10, a = b$)*

| Tài liệu | Tải trọng | Nén 2 cạnh | | Nén 4 cạnh | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | UD | FG-X | UD | FG-X |
| Tài liệu [10] | Parabol | 37.3837 | 38.8689 | 18.6876 | 19.4302 |
| Luận án (FEM) | | 35.9630 | 36.6683 | 18.3715 | 18.7429 |
| Sai khác (%) | | 3.95(%) | 6(%) | 1.72(%) | 3.67(%) |
| Tài liệu [10] | Tuần hoàn | 36.5603 | 38.0141 | 18.2794 | 19.0066 |
| Luận án (FEM) | | 35.1773 | 35.8671 | 17.9733 | 18.3370 |
| Sai khác (%) | | 3.93(%) | 6(%) | 1.72(%) | 3.86(%) |

*3.1.4.2. Kết quả phân tích mất ổn định*

Trong phần này trình bày kết quả phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC với hai mô hình phân tích như Hình 3.2. Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr} = \frac{F_{cr}b^2}{E_m h^3}$ của tấm FG-CNTRC được phân tích với thông số hình học $h = 1, b/h = 10, a = b$, thông số vật liệu FG-CNT đã được trình bày ở Chương 2

Bảng 3.4 so sánh hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm composite nhiều lớp cho mô hình FEM 3D với hai loại mô hình như trong Hình 3.2. Mô hình 1 (Hình 3.1a) là sự phân bố tuyến tính của CNT trong từng lớp và tạo thành tấm FG-CNTRC biến đổi chức năng khi kết hợp tất cả các lớp, Mô hình 2 (Hình 3.1b)

là sự phân bố của CNT biến đổi chức năng theo chiều dày trong từng lớp. Với Mô hình 1, hệ số tải trọng tới hạn của tấm là lớn nhất với kiểu phân bố FG-X và nhỏ nhất với kiểu phân bố FG-O. Trong khi đó đối với Mô hình 2 thì kiểu FG-O lại có hệ số tải trọng tới hạn là lớn nhất (lớn hơn không đáng kể so với kiểu FG-X). Sự khác nhau giữa 2 mô hình có thể giải thích rằng sự phân bố ứng suất trong tấm nhiều lớp. Đối với kiểu FG-O ở mô hình 1 thì mặt trên và mặt dưới là vùng có tỉ lệ CNT là ít nhất trong khi đó đối với mô hình 2 thì sự phân bố CNT lại đan xen trong từng lớp.

***Bảng 3.4:*** *So sánh 2 mô hình cho hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm SSSS FG-CNTRC chịu tải nén parabol 2 cạnh*

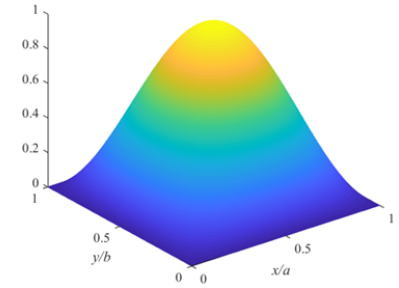
| FEM | $V^*_{CNT}$ | UD | FG-X | FG-O |
|---|---|---|---|---|
| Mô hình I | $V^*_{CNT} = 0.28$ | 30.5434 | 33.9581 | 24.1744 |
| | $V^*_{CNT} = 0.12$ | 14.1040 | 15.6972 | 11.1700 |
| Mô hình II | $V^*_{CNT} = 0.28$ | 30.5434 | 31.0429 | 31.3792 |
| | $V^*_{CNT} = 0.12$ | 14.1040 | 14.1196 | 14.2227 |

***Bảng 3.5:*** *So sánh 2 mô hình cho hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm SSSS FG-CNTRC chịu tải nén parabol 2 cạnh*

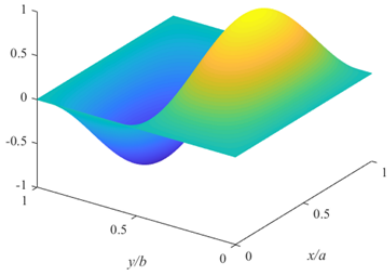
| Loại CNT | FEM | | Giải tích | |
|---|---|---|---|---|
| | $V^*_{CNT} = 0.12$ | $V^*_{CNT} = 0.28$ | $V^*_{CNT} = 0.12$ | $V^*_{CNT} = 0.28$ |
| UD | 14.1040 | 30.5434 | 14.2984 | 29.8636 |
| FG-X | 15.6972 | 33.9581 | 17.7611 | 36.5837 |
| FG-O | 11.1700 | 24.1744 | 10.8193 | 23.0612 |

Bảng 3.5 so sánh hệ số tải tới hạn của các tấm FG-CNTRC nhiều lớp sử dụng phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn. Mô hình I được sử dụng cho trường hợp này với ba loại phân bố CNT. Có thể thấy rằng, sự sai khác nhiều nhất và ít nhất giữa hai phương pháp là khoảng 1.36(%) và 7.2(%).

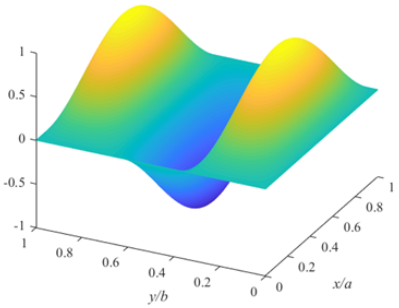
Hình 3.6 trình bày sáu mode mất ổn định (buckling) đầu tiên của tấm composite gia cường ống nano carbon đơn lớp theo mô hình I. Mode mất ổn định thứ nhất tương ứng là dạng mất ổn định với giá trị tải tới hạn của tấm FG-CNTRC.



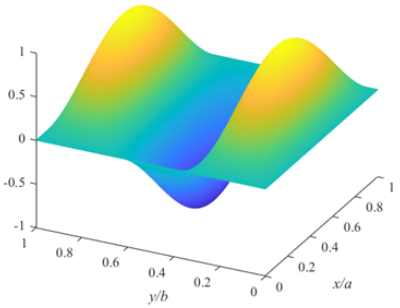

*(a). Mode 1 ($m = n = 1$)*



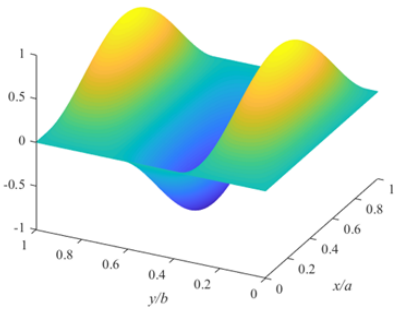

*(b). Mode 2 ($m = 1, n = 2$)*



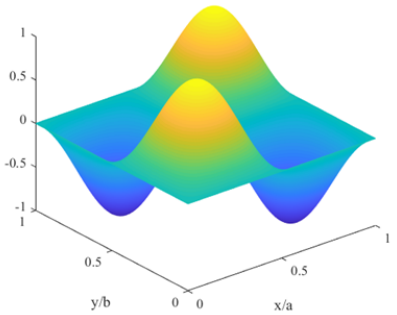

*(c). Mode 3 ($m = 1, n = 3$)*




*(d). Mode 4 ($m = 1, n = 4$)*




*(e). Mode 5 ($m = 2, n = 1$)*




*(f). Mode 6 ($m = 2, n = 2$)*

***Hình 3.6:*** *Sáu mode mất ổn định đầu tiên của tấm FG-CNTRC theo mô hình I (Giải tích)*

Bảng 3.6 trình bày ảnh hưởng của 3 loại phân bố CNT và tỉ lệ thể tích tới ứng xử mất ổn định của tấm composite nhiều lớp chịu tải parabol với nền PMMA

và PmPV cho Mô hình II. Ba giá trị tỉ lệ thể tích $V^*_{CNT}$ = (0.12, 0.17, 0.28) cho tấm PMMA/CNT và $V^*_{CNT}$ = (0.11, 0.14, 0.17) cho tấm PmPV/CNT. Đối với tấm PMMA/CNT, hệ số tải trọng tới hạn với $V^*_{CNT} = 0.28$ là lớn nhất cho cả 3 loại phân bố CNT trong khi đó giá trị này là thấp nhất với $V^*_{CNT} = 0.12$. Tương tự, đối với tấm PmPV/CNT, hệ số tải trọng tới hạn của tấm tăng khi tỉ lệ thể tích CNT tăng lên. Điều này được giải thích rằng, khi tỉ lệ CNT tăng lên làm gia tăng độ cứng của tấm vì độ cứng của các ống CNT lớn hơn rất nhiều so với độ cứng của nền polymer bao xung quanh. Một sự quan sát khác là hệ số tải trọng tới hạn của tấm với Mô hình II cho trường hợp loại phân bố FG-X thì thất hơn một chút so với loại FG-O trong khi đó đối với Mô hình I thì giá trị này cho loại FG-X lại lớn hơn FG-O nhiều. Điều này có thể được giải thích rằng vùng gần mặt giữa của tấm composite nhiều lớp là nơi có ứng suất gần bằng không và có tỉ lệ CNT lớn nhất đối với loại FG-X và nhỏ nhất đối với loại FG-O. Do đó, trong trường hợp FG-X phần gia tăng tỉ lệ CNT tại khu vực mặt giữa không ảnh hưởng nhiều tới ứng suất. Vì vậy, độ cứng uốn của tấm nhiều lớp trong trường hợp FG-X là thấp hơn so với FG-O khi có cùng tỉ lệ thể tích CNT phân bổ trong 4 lớp của tấm.

***Bảng 3.6:*** *Ảnh hưởng tỉ lệ thể tích và loại phân bố CNT tới hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp theo Mô hình II (FEM)*

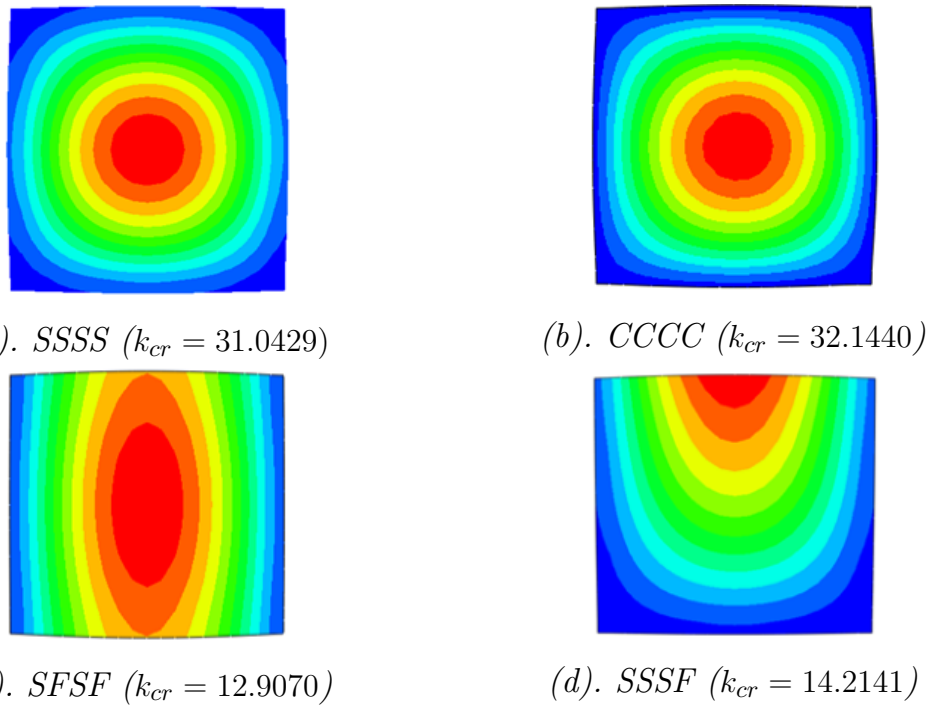
| Loại composite | $V^*_{CNT}$ | UD | FG-X | FG-O |
|---|---|---|---|---|
| PMMA/CNT | 0.12 | 14.1040 | 14.1196 | 14.2227 |
| | 0.17 | 21.8447 | 21.8682 | 22.0329 |
| | 0.28 | 30.5434 | 31.0429 | 31.3792 |
| PmPV/CNT | 0.11 | 14.9653 | 14.9665 | 15.0548 |
| | 0.14 | 17.5187 | 17.5253 | 17.6165 |
| | 0.17 | 23.3075 | 23.3498 | 23.5029 |

***Bảng 3.7:*** *Hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm UD-CNT nhiều lớp 4 cạnh tựa đơn chịu tải nén 2 và 4 cạnh theo Mô hình II (FEM)*

| Loại composite | $V^*_{\text{CNT}}$ | Tải phân bố đều | | Tải parabol | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 cạnh | 4 cạnh | 2 cạnh | 4 cạnh |
| PMMA/CNT | 0.12 | 18.2954 | 9.3894 | 14.1040 | 7.2589 |
| | 0.17 | 28.2205 | 14.4164 | 21.8447 | 11.1592 |
| | 0.28 | 39.5843 | 20.4779 | 30.5434 | 15.8039 |
| PmPV/CNT | 0.11 | 19.4586 | 10.0891 | 14.9653 | 7.7831 |
| | 0.14 | 22.7488 | 11.8980 | 17.5187 | 9.1653 |
| | 0.17 | 30.2111 | 15.6405 | 23.3075 | 12.0690 |

Bảng 3.7 so sánh ảnh hưởng của tải nén đều và tải nén parabol tới ứng xử mất ổn định của tấm composite UD-CNT nhiều lớp tựa đơn 4 cạnh cho Mô hình II. Sự phân bố tải trọng ở hai cạnh bên tác dụng vào các node của tấm được chia theo tỉ lệ thích hợp để tổng tải trọng tác dụng lên 1 cạnh của tấm là bằng nhau giữa hai loại tải nén đều và tải nén parabol. Quan sát thấy rằng, hệ số tải trọng tới hạn của tấm nhiều lớp chịu tải nén đều cao hơn so với tấm chịu tải nén parabol. Ngoài ra, theo kết quả được trình bày trong Bảng 3.3 thì hệ số tải trọng tới hạn đối với tấm chịu tải parabol cao hơn so với tải hình sin. Điều này có thể được giải thích bằng việc xem xét moment quán tính của mô hình tải trọng phân bố (Trục trọng tâm song song với hướng của tải trọng) kết hợp với các điều kiện biên của tấm. Thật vậy, moment quán tính của ba loại tải trọng thể hiện trong Hình 3.5 là $0.0833 * N0$, $0.05 * N0$ và $0.0474 * N0$ tương ứng với trường hợp tải nén đều, tải parabol và tải hình sin. Có thể thấy rằng, việc tăng moment quán tính của sự phân bố tải trọng cũng làm cho tải trọng tới hạn của tấm tăng lên, điều này có liên quan trực tiếp tới sự phân bố ứng suất bên trong tấm và sự biến dạng phụ thuộc vào moment quán tính và điều kiện biên của tấm. Hơn nữa, lưu ý rằng tấm trong trường hợp này là tấm vuông với tỉ lệ kích thước ($a = b$) nên có thể làm tăng sự phụ thuộc của tải trọng tới hạn vào cấu

hình phân bố tải trọng, sự phụ thuộc này sẽ giảm đi khi tỉ lệ kích thước của tấm tăng lên. Ngoài ra, có thể quan sát thấy rằng hệ số tải trọng tới hạn của tấm trong trường hợp tải trọng nén 2 cạnh cao hơn gần đôi so với tải trọng nén 4 cạnh. Ví dụ, trong trường hợp $V^*_{CNT} = 0.12$, nền PMMA thì hệ số tải trọng tới hạn là $k_{cr} = 18.2954$ và $k_{cr} = 9.3894$ tương ứng với tấm chịu tải nén 2 cạnh và 4 cạnh.



*(a). SSSS ($k_{cr} = 31.0429$)* *(b). CCCC ($k_{cr} = 32.1440$)*

*(c). SFSF ($k_{cr} = 12.9070$)* *(d). SSSF ($k_{cr} = 14.2141$)*

***Hình 3.7:*** *Mode mất ổn định của tấm FG-X nhiều lớp với điều kiện biên khác nhau theo Mô hình II (FEM)*

Ảnh hưởng của bốn loại điều kiện biên khác nhau và ba loại phân bố CNT đến hệ số tải trọng tới hạn của tấm nhiều lớp chịu tải trọng parabol được trình bày trong Bảng 3.8. Rõ ràng rằng hệ số tải tới hạn của tấm nhiều lớp với điều kiện biên ngàm 4 cạnh (CCCC) là cao nhất, trong khi đó đối với tấm có hai cạnh tựa đơn và hai cạnh tự do đối xứng (SFSF) là thấp nhất. Hình 3.7 trình bày hình dạng mode mất ổn định cho tấm composite nhiều lớp với các điều kiện biên khác nhau theo Mô hình II. Kết quả hệ số tải trọng tới hạn trong Hình 3.7

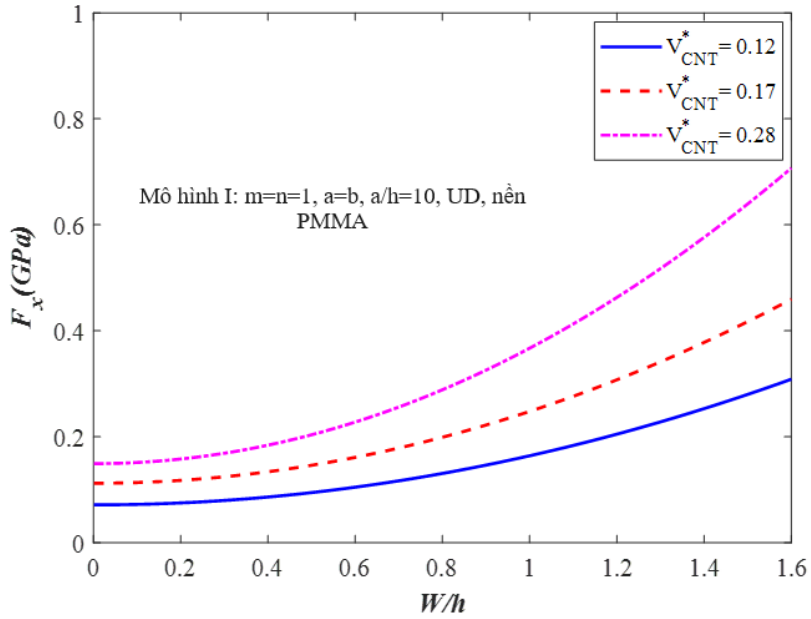
tương ứng với trường hợp FG-X type, $V^*_{CNT} = 0.28$ trong Bảng 3.8.

***Bảng 3.8:*** *Ảnh hưởng điều kiện biên tới hệ số tải trọng tới hạn $k_{cr}$ của tấm nhiều lớp chịu tải parabol theo Mô hình II (FEM)*

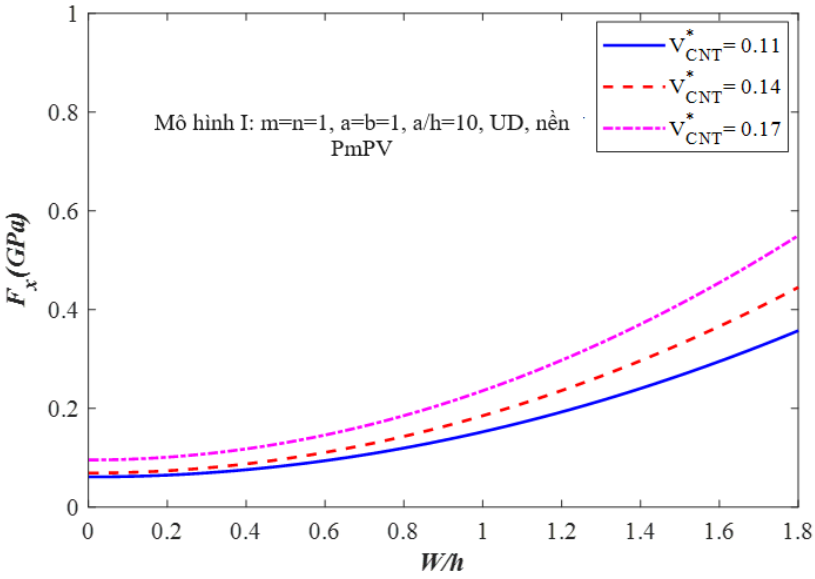
| Loại composite | BCs | UD | FG-X | FG-O |
|---|---|---|---|---|
| PMMA/CNT $V^*_{CNT} = 0.28$ | SSSS | 30.5434 | 31.0429 | 31.3792 |
| | CCCC | 31.6043 | 32.1440 | 32.6065 |
| | SFSF | 12.4287 | 12.9070 | 12.3466 |
| | SSSF | 13.6829 | 14.2141 | 13.6035 |
| PmPV/CNT $V^*_{CNT} = 0.17$ | SSSS | 23.3075 | 23.3498 | 23.5029 |
| | CCCC | 24.1083 | 24.1101 | 24.4015 |
| | SFSF | 9.5219 | 9.7615 | 9.3303 |
| | SSSF | 10.4611 | 10.7402 | 10.2709 |

*3.1.4.3. Kết quả phân tích sau tới hạn*

Trong phần này trình bày các kết quả về phân tích sau tới hạn của tấm dưới dạng biểu đồ đường cong tải trọng ($Fx$) với tỉ lệ độ võng/chiều dày ($W/h$). Tấm composite gia cường FG-CNT được xem xét chịu tải trọng nén đều và tải nén parabol. Phương pháp phân tích sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba và tính phi tuyến von Kármán để suy ra phương trình cơ bản (phương trình 3.25) cho phân tích mất ổn định và sau mất ổn định. Hơn nữa, tấm FG-CNTRC của Mô hình I sử dụng trong phần này với giá trị tải tới hạn sử dụng phương pháp bán giải tích đã được so sánh với kết quả sử dụng phương pháp FEM trình bày trong Bảng 3.21. Các tính chất vật liệu FG-CNT được trình bày ở Mục 2.4 của Chương 2 và các thông số hình học được sử dụng trong phần này được thể hiện chi tiết trong từng hình.



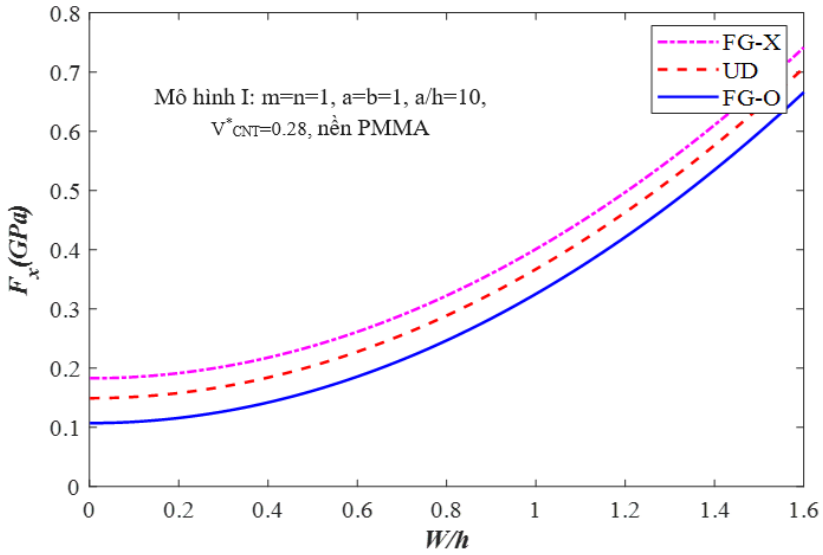

***Hình 3.8:*** *Ảnh hưởng tỉ lệ thể tích CNT tới đường cong tải trọng (Fx)-tỉ lệ độ võng/chiều dày (W/h) của tấm nanocomposite với nền PMMA*



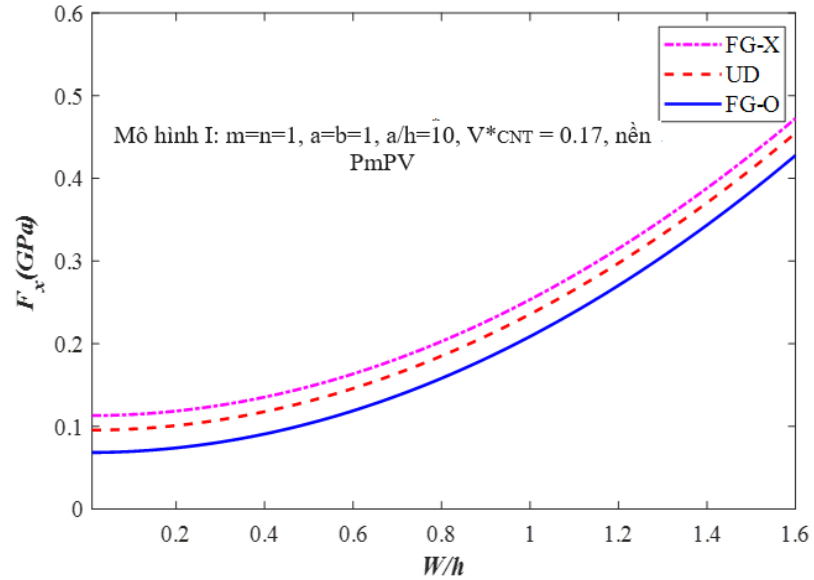

***Hình 3.9:*** *Ảnh hưởng tỉ lệ thể tích CNT tới đường cong tải trọng (Fx)-tỉ lệ độ võng/chiều dày (W/h) của tấm nanocomposite với nền PmPV*

Hình 3.8 và Hình 3.9 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT gia cố hai loại nền polymer PMMA và PmPV tương ứng tới ứng xử sau tới hạn của các

tấm composite nhiều lớp. Có thể thấy, khả năng chịu tải của tấm composite nhiều lớp được tăng lên khi tỉ lệ thể tích của CNT.



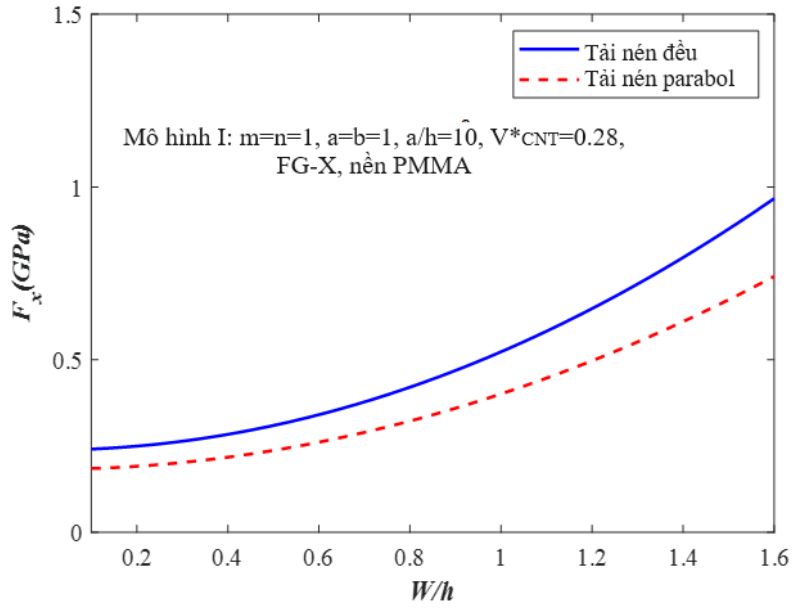

***Hình 3.10:*** *Ảnh hưởng của loại phân bố CNT tới đường cong tải trọng (Fx)-tỉ lệ độ võng/chiều dày (W/h) của tấm nanocomposite với nền PMMA*




***Hình 3.11:*** *Ảnh hưởng của loại phân bố CNT tới đường cong tải trọng (Fx)-tỉ lệ độ võng/chiều dày (W/h) của tấm nanocomposite với nền PmPV*

Ảnh hưởng của ba loại phân bố CNTs: UD, FG-X và FG-O đối với đường

cong tải trọng (Fx) trên tỉ lệ độ võng/chiều dày (W/h) của các tấm composite nhiều lớp chịu tải nén parabol được trình bày trong Hình 3.10 và Hình 3.11 tương ứng cho nền PMMA và PmPV. Có thể thấy rằng, sự phân bố CNT ảnh hưởng rõ ràng đến khả năng chịu tải của tấm composite nhiều lớp và giá trị này của tấm composite nhiều lớp với loại FG-X là cao nhất và FG-O là thấp nhất.

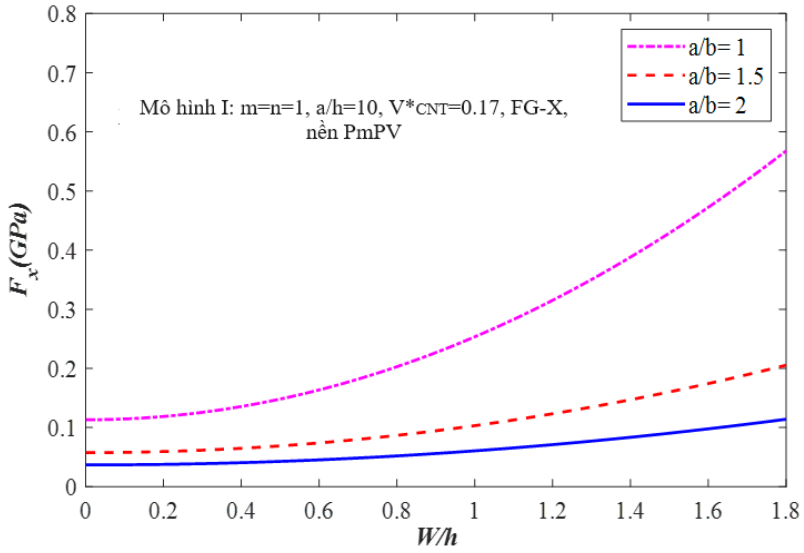



***Hình 3.12:*** *So sánh hai loại tải trọng ảnh hưởng tới đường cong tải trọng (Fx)-tỉ lệ độ võng/chiều dày (W/h) của tấm nanocomposite với nền PMMA*

Hình 3.12 so sánh ảnh hưởng của tải nén đều và tải nén parabol lên đường cong tải trọng trên tỉ lệ độ võng/chiều dày (W/h) của các tấm PMMA gia cường FG-X CNT. Có thể quan sát thấy rằng giá trị tải trọng (Fx) của tấm nhiều lớp khi chịu tải nén parabol (đường nét đứt màu đỏ) thấp hơn giá trị tải trọng (Fx) của tấm khi chịu tải nén đều (đường nét liền màu xanh lam). Điều này có thể giải thích là do liên quan tới giá trị tải trọng tới hạn như đã được trình bày trong phần trước.

Hình 3.13 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dài trên chiều rộng $a/b$ tới đường cong tải trọng độ võng sau mất ổn định của tấm PmPV gia cường FG-X CNTs. Có thể thấy rằng, tải trọng của tấm tỉ lệ nghịch với tỉ lệ $a/b$. Khi một

chiều của tấm được cố định thì việc tăng tỉ lệ $a/b$ sẽ làm tăng tỉ lệ kích thước của tấm làm cho độ cứng buckling và post-buckling giảm đi. Hơn nữa, khi tỉ lệ $a/b$ lớn thì ứng xử của tấm giống như ứng xử của cột có chiều rộng hữu hạn, khi tỉ lệ $a/b$ nhỏ tới mức giới hạn thì tấm không xảy ra phá huỷ do uốn.




***Hình 3.13:*** *Ảnh hưởng tỉ lệ $a/b$ tới đường cong tải trọng $(Fx)$-tỉ lệ độ võng/chiều dày $(W/h)$ của tấm nanocomposite với nền PmPV*

## 3.2. Phân tích mất ổn định của vỏ nón cụt FG-CNTRC

Trong phần này trình bày kết quả phân tích mất ổn định và sau mất ổn định của vỏ nón cụt FG-CNTRC đặt trên nền đàn hồi sử dụng phương pháp bán giải tích để phân tích bài toán này. Cụ thể như sau:

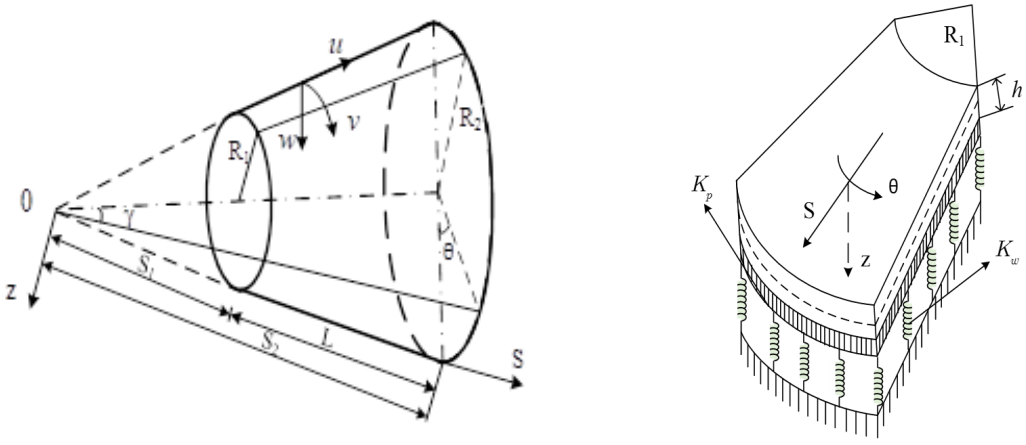
- Thiết lập các phương trình cân bằng của vỏ nón cụt ở dạng đạo hàm riêng theo tọa độ và thời gian dựa trên lý thuyết vỏ cổ điển với tính phi tuyến hình học von Kármán.
- Các phương trình cân bằng ở dạng đạo hàm riêng với điều kiện biên tựa đơn được giải bằng phương pháp Galerkin và hàm ứng suất Airy.
- Dạng nghiệm hàm ứng suất được xác định bao gồm cả thành phần phi

tuyến thỏa mãn điều kiện biên và phương trình tương thích biến dạng với các hệ số xác định theo biến độ võng bằng phương pháp cân bằng điều hòa.

- Khảo sát ảnh hưởng của các thông số hình học và vật liệu tới giá trị tải trọng tới hạn và mối quan hệ tải trọng-độ võng.

### *3.2.1. Phương trình phân tích mất ổn định của vỏ nón cụt*

Xem xét một vỏ nón cụt được đặt trên nền đàn hồi với chiều dày của vỏ là $h$, chiều dài $L$ và góc ở nửa đỉnh của hình nón $\gamma$ giới hạn bởi hai đường tròn với bán kính nhỏ $R_1$ và bán kính lớn $R_2$. Hệ tọa độ của vỏ nón cụt là $(S, \theta, z)$, trục $S$ hướng theo đường sinh tính từ đỉnh của hình nón, trục $\theta$ hướng theo đường vĩ tuyến và trục $z$ vuông góc với mặt trung bình và hướng vào trong. $S_1, S_2$ lần lượt là khoảng cách từ đỉnh tới đáy nhỏ và đáy lớn tương ứng. Các ký hiệu $u, v, w$ tương ứng đại diện cho chuyển vị theo hướng đường sinh, đường vĩ tuyến và đường hướng vào trong của vỏ. Hệ trục tọa độ và các đặc tính hình học của vỏ nón cụt được biểu thị như Hình 3.14.




*(a). Mô hình vỏ nón cụt* *(b). Vỏ nón cụt trên nền đàn hồi*

***Hình 3.14:*** *Mô hình vỏ nón cụt trên nền đàn hồi*

Tải trọng thay thế quan hệ của nền đàn hồi với kết cấu vỏ nón cụt theo mô

hình nền đàn hồi Pasternak được cho như sau [100]:

$$q_e(S,\varphi) = K_w w - K_p \Delta w, \Delta w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial w}{\partial S} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \tag{3.27}$$

trong đó, $\varphi = \theta \sin(\gamma)$, $w$ là độ võng của vỏ nón, $K_w \left(N/m^3\right)$ đại diện độ cứng thành phần nền tuyến tính (mô hình nền Winkler), $K_p \left(N/m\right)$ đại diện độ cứng của thành phần phi tuyến (mô hình nền Pasternak gồm cả hai thành phần $K_w$ và $K_p$).

Lý thuyết vỏ cổ điển được sử dụng để xây dựng các phương trình cân bằng của vỏ nón cụt FG-CNTRC với mô hình vật liệu của Shen trong phương trình (2.42). Trường biến dạng có xét tính phi tuyến hình học của vỏ nón cách mặt giữa một khoảng $z$ được xác định như sau [100]:

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_S \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{S\theta} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \varepsilon_S^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{S\theta}^0 \end{array}\right\} + z \left\{\begin{array}{c} k_s \\ k_\theta \\ 2k_{S\theta} \end{array}\right\} \tag{3.28}$$

Các thành phần biến dạng tại mặt giữa của vỏ được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_S^0 &= \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial S}\right)^2 \\
\varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{S} - \frac{w}{S}\cot\gamma + \frac{1}{2S^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 \\
\gamma_{S\theta}^0 &= 2\left[\frac{1}{S}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{S} + \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{S}\left(\frac{\partial w}{\partial S}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2\right] \\
k_S &= -\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \\
k_\theta &= -\frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{S}\frac{\partial w}{\partial S} \\
k_{S\theta} &= -\frac{1}{S}\frac{\partial^2 w}{\partial S \partial \varphi} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vỏ nón cụt theo mô hình vật liệu của Shen, định luật Hooke được xác định như sau:

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_S\\ \sigma_\theta\\ \sigma_{S\theta}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{array}\right]\left\{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_S\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{S\theta}\end{array}\right\}-\Delta T\left\{\begin{array}{c}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\\ 0\end{array}\right\}\right\} \tag{3.30}$$

trong đó, các hệ số $Q_{ij}(ij=11,12,22,66)$ được xác định như sau:

$$Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ Q_{22}=\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ Q_{12}=\frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\ Q_{66}=G_{12}$$

Các thành phần lực và moment của vỏ nón cụt được viết lại như sau:

$$\left\{\begin{array}{c}N_S\\ N_\theta\\ N_{S\theta}\\ M_S\\ M_\theta\\ M_{S\theta}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cccccc}A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 2B_{66}\\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0\\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & 2D_{66}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_S^0\\ \varepsilon_\theta^0\\ \gamma_{S\theta}^0\\ \chi_s\\ \chi_\theta\\ \chi_{S\theta}\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c}N_S^T\\ N_\theta^T\\ 0\\ M_S^T\\ M_\theta^T\\ 0\end{array}\right\} \tag{3.31}$$

trong đó, các hệ số $A_{ij},\ B_{ij},\ D_{ij}\,(i=1\div 2,6;j=1\div 2,6\,)$ được xác định như sau:

$$\big(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\big)=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}(1,z,z^2)\,dz,\ (ij=11,12,22,66)$$

$$\left[\begin{array}{cc}N_S^T & M_S^T\\ N_\theta^T & M_\theta^T\end{array}\right]=\int_{-h/2}^{h/2}\left[\begin{array}{cc}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12} & Q_{22}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\end{array}\right\}(1,z)\,\Delta T\,dz$$

$$(N_i,M_i)=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i(1,z)\,dz,\ (i=s,\theta)$$

Phương trình cân bằng của vỏ nón cụt được xây dựng theo lý thuyết vỏ cổ điển với tính phi tuyến hình học như sau:

$$
\begin{aligned}
&S\frac{\partial N_S}{\partial S}+\frac{\partial N_{S\theta}}{\partial \varphi}+N_S-N_\theta=0\\
&\frac{\partial N_\theta}{\partial \varphi}+S\frac{\partial N_{S\theta}}{\partial S}+2N_{S\theta}=0\\
&S\frac{\partial^2 M_S}{\partial S^2}+2\frac{\partial M_S}{\partial S}+2\left(\frac{\partial^2 M_{S\theta}}{\partial S\partial \varphi}+\frac{1}{S}\frac{\partial M_{S\theta}}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{S}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial M_\theta}{\partial S}\\
&-N_\theta\cot\gamma+\frac{\partial}{\partial S}\left(SN_S\frac{\partial w}{\partial S}+N_{S\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(N_{S\theta}\frac{\partial w}{\partial S}+\frac{1}{S}N_\theta\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\\
&-SK_w w+SK_p\Delta w=0
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Sử dụng hàm ứng suất Airy $F(s,\theta,t)$ [100] như sau:

$$
N_S=\frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{S}\frac{\partial F}{\partial S},\ N_\theta=\frac{\partial^2 F}{\partial S^2},\ \ N_{S\theta}=-\frac{1}{S}\frac{\partial^2 F}{\partial S\partial \varphi}+\frac{1}{S^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}
\tag{3.33}
$$

Phương trình tương thích biến dạng của vỏ nón được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\cot\gamma}{S}\tfrac{\partial^2 w}{\partial S^2}-\tfrac{1}{S}\tfrac{\partial^2 \gamma^0_{S\theta}}{\partial S\partial \varphi}-\tfrac{1}{S^2}\tfrac{\partial \gamma^0_{S\theta}}{\partial \varphi}+\tfrac{\partial^2 \varepsilon^0_\theta}{\partial S^2}+\tfrac{1}{S^2}\tfrac{\partial^2 \varepsilon^0_S}{\partial \varphi^2}+\tfrac{2}{S}\tfrac{\partial \varepsilon^0_\theta}{\partial S}-\tfrac{1}{S}\tfrac{\partial \varepsilon^0_S}{\partial S}=\\
&=\tfrac{1}{S^4}\left(\tfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2-\tfrac{2}{S^3}\tfrac{\partial w}{\partial \varphi}\tfrac{\partial^2 w}{\partial S\partial \varphi}-\tfrac{1}{S^2}\left[\tfrac{\partial^2 w}{\partial S^2}\tfrac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}-\left(\tfrac{\partial^2 w}{\partial S\partial \varphi}\right)^2\right]-\tfrac{1}{S}\tfrac{\partial w}{\partial S}\tfrac{\partial^2 w}{\partial S^2}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Hai phương trình đầu của hệ phương trình (3.34) thỏa mãn khi thay hàm ứng suất Airy. Sau quá trình biến đổi thu được phương trình tương thích biến dạng và phương trình cân bằng theo biến hàm ứng suất và độ võng $F_1, w$ với $F=F_1e^{2x}, S=S_1e^x$ (3.34) như sau:

$$
\begin{aligned}
H_{11}(F_1)+H_{12}(w)+H_{13}(F_1,w)=0\\
H_{21}(F_1)+H_{22}(w)+H_{23}(w,w)=0
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

trong đó, các hệ số $H_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$ được trình bày trong phụ lục A.2

Điều kiện biên của vỏ được giả sử là tựa đơn xác định như sau:

$$
w=0 \text{ tại } x=0 \text{ và } x=x_0
\tag{3.36}
$$

Trong luận án này sử dụng phương pháp hàm ứng suất để giải bài toán với mghiệm của phương trình (3.35) là hàm độ võng $w$ và hàm ứng suất thỏa mãn điều kiện biên được xác định như sau [100]:

$$\begin{aligned} w &= fe^{x}\sin(m_1 x)\sin(m_2\theta) + Gfe^{x}\sin^2(m_1 x) \\ m_1 &= \tfrac{m\pi}{x_0}, m_2 = \tfrac{n}{\sin\gamma}, x_0 = \ln\tfrac{S_2}{S_1} \end{aligned} \tag{3.37}$$

trong đó, hàm nghiệm độ võng $w$ gồm hai thành phần với hệ số $f$ là biên độ độ võng trong trường hợp tuyến tính, hệ số $G$ thể hiện mối quan hệ giữa thành phần tuyến tính và phi tuyến của độ võng.

Thay phương trình (3.37) vào phương trình tương thích biến dạng (phương trình 2 của (3.35)) và sử dụng phương pháp cân bằng điều hòa, nghiệm hàm ứng suất $F_1$ nhận được như sau:

$$\begin{aligned} &F_1 = K_1 fe^{-x}\sin(m_1 x)\sin(m_2\varphi) + K_2 fe^{-x}\cos(m_1 x)\sin(m_2\varphi) \\ &+K_3 Gfe^{-x}\cos(2m_1 x) + K_4 Gfe^{-x}\sin(2m_1 x) \\ &+\left(K_{51}G^2 f + K_{52} + K_{53}G\right) f\cos(2m_1 x) + \left(K_{61}G^2 f + K_{62} + K_{63}G\right) f\sin(2m_1 x) \\ &+K_7 f^2\cos(2m_1 x)\cos(2m_2\varphi) + K_8 f^2\sin(2m_1 x)\cos(2m_2\varphi) \\ &+\left(K_{91}Gf^2 + K_{92}f\right)\cos(m_1 x)\sin(m_2\varphi) + \left(K_{101}Gf^2 + K_{102}f\right)\sin(m_1 x)\sin(m_2\varphi) \\ &+K_{11}Gf^2\cos(3m_1 x)\sin(m_2\varphi) + K_{12}Gf^2\sin(3m_1 x)\sin(m_2\varphi) \\ &+K_{13}G^2 f^2\cos(4m_1 x) + K_{14}G^2 f^2\sin(4m_1 x) \\ &+K_{15}f^2\cos(2m_2\varphi) + K_{16}Gfe^{-x} - \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2x}\cos(m_2\varphi)\right)TS_1^2 \end{aligned} \tag{3.38}$$

trong đó, các hệ số $K_i (i = 1, ..., 16)$ được trình bày ở phụ lục A.2

Áp dụng phương pháp Galerkin với các giới hạn tích phân của vỏ nón cụt được cho bởi công thức sau:

$$\int_0^{x_0}\int_0^{2\pi\sin\gamma} \Phi e^{x}\sin(m_1 x)\sin(m_2\varphi)d\varphi dx = 0 \tag{3.39}$$

$$\int_0^{x_0}\int_0^{2\pi\sin\gamma} \Phi e^{x}\sin^2(m_1 x)d\varphi dx = 0 \tag{3.40}$$

trong đó, $\Phi$ đại diện cho phương trình (3.35), sau quá trình tính toán nhận được

phương trình sau:

$$u_1 f^3 G^2 + u_2 f^2 G + u_3 f^3 + u_4 T f + u_5 f = 0 \tag{3.41}$$

$$u_6 G^3 f^3 + u_7 f^2 G^2 + u_8 f^3 G + u_{10} f G + u_{11} f^2 + (u_9 f G + u_{12}) T = 0 \tag{3.42}$$

trong đó, các hệ số $u_i (i = 1, ..., 14)$ được trình bày trong phụ lục A.2

Từ phương trình (3.41) xác định mối quan hệ giữa thành phần tuyến tính $f$ và phi tuyến $G$ của độ võng như sau:

$$\frac{u_5 u_{12}}{u_4} + \frac{(u_3 u_{12} - u_4 u_{11}) f^2}{u_4} + \frac{(u_1 u_{12} + u_2 u_9 - u_4 u_7) f^2 G^2}{u_4} + \frac{(u_1 u_9 - u_4 u_6) f^3 G^3}{u_4} + \left( \frac{(u_3 u_9 - u_4 u_8) f^3}{u_4} + \frac{(u_2 u_{12} - u_4 u_{10} + u_5 u_9) f}{u_4} \right) G = 0 \tag{3.43}$$

Giả sử mối quan hệ $G = \lambda f$ và bỏ qua thành phần phi tuyến bậc cao, từ phương trình (3.43) nhận được:

$$\lambda = -\frac{u_3 u_{12} - u_4 u_{11}}{u_2 u_{12} - u_4 u_{10} + u_5 u_9} \tag{3.44}$$

Phương trình mối liên hệ tải dọc trục $T$ và độ võng $w$ thu được bằng việc thay phương trình (3.44) vào phương trình (3.41):

$$T = -\frac{f^4 A^2 u_1 + f^2 A u_2 + f^2 u_3 + u_5}{u_4} \tag{3.45}$$

Tải mất ổn định được xác định từ phương trình (3.45) với $f \to 0$ thu được biểu thức như sau:

$$T_{mn} = \frac{u_5}{u_4} \tag{3.46}$$

Giá trị tải trọng tới hạn $T_{cr}$ là giá trị nhỏ nhất của tải mất ổn định trong phương trình trên phụ thuộc vào sự thay đổi của mode mất ổn định $(m, n)$.

Phương trình (3.45) và (3.46) được sử dụng trong phân tích mất ổn định của vỏ nón cụt FG-CNTRC, cụ thể xác định tải trọng tới hạn $F_{cr}$ và mối liên hệ tải trọng-độ võng.

### *3.2.2. Kết quả và thảo luận*

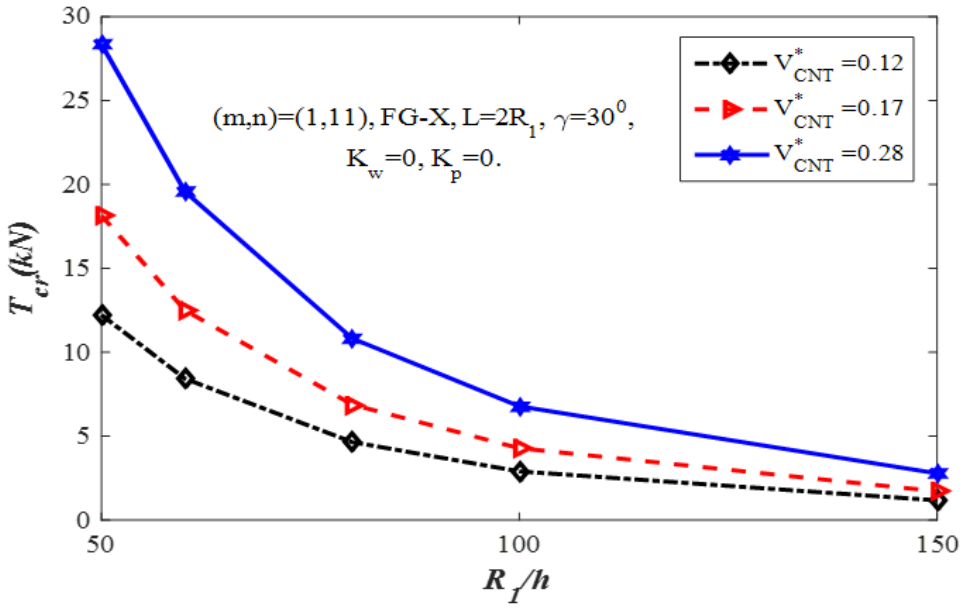
#### *3.2.2.1. Kết quả phân tích mất ổn định*

Phần này trình bày kết quả giá trị tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC chịu tải nén dọc trục. Các thông số vật liệu của nền và ống CNT đã được trình bày ở Chương 2.

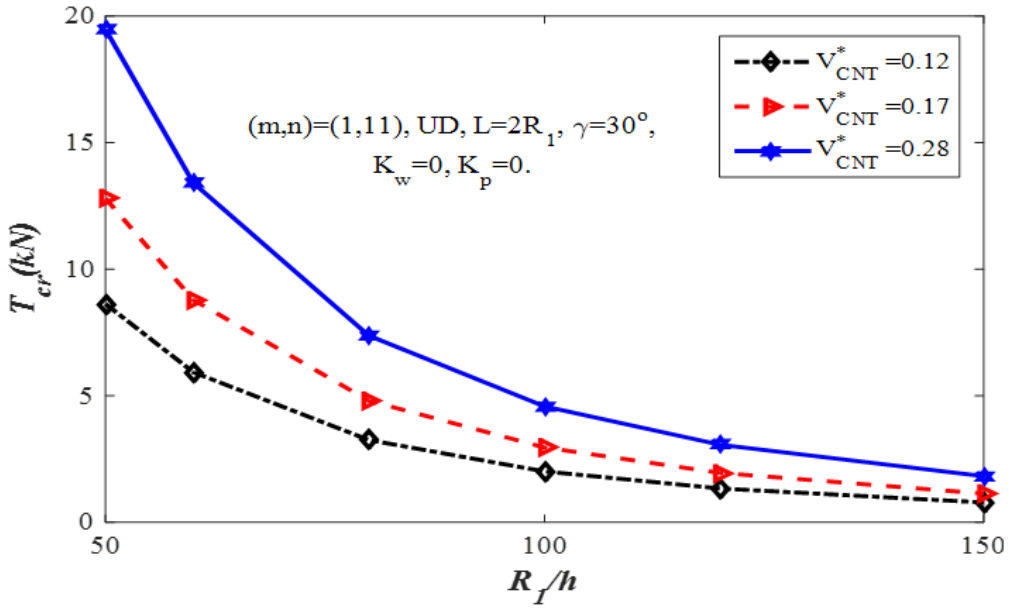
Hình 3.15 và Hình 3.16 lần lượt trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT và tỷ số bán kính trên độ dày $R_1/h$ đến tải tới hạn của vỏ nón cụt gia cường theo kiểu phân bố biến đổi tuyến tính (FG-X) và phân bố đều (UD). Từ kết quả của hình vẽ có thể thấy rằng giá trị tải trọng tới hạn của vỏ nón được cải thiện khi tỉ lệ thể tích của CNT tăng lên. Việc tăng giá trị thể tích CNT làm cho tải tới hạn tăng lên và khả năng chịu tải của vỏ nón cụt FG-CNTRC tăng lên, có thể giải thích được là do modul đàn hồi của ống CNT lớn hơn rất nhiều so với modul đàn hồi của nền polymer (kết quả này có thể được so sánh trong Bảng 2.3 và Bảng 2.4). Hơn nữa, tỷ số $R_1/h$ có ảnh hưởng đáng kể đến tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt vì khi tăng kích thước mà giữ nguyên độ dày thì vỏ sẽ trở nên mỏng hơn dẫn đến khả năng chịu tải của vỏ nón cụt trở nên thấp hơn. Ngoài ra, tải tới hạn của vỏ nón cụt gia cường ống CNT có cơ tính biến thiên (FG-X) cao hơn đáng kể so với vỏ nón cụt gia cố ống CNT phân bố đều trong các điều kiện có cùng thông số hình học. Cụ thể, với cùng các tham số hình học, vật liệu với $V^*_{CNT} = 0.28, R_1/h = 100$ giá trị tải trọng tới hạn của vỏ hình nón cụt với các ống CNT phân bố biến đổi tuyến tính FG-X là $T_{cr} \approx 7\ , kN$ (Hình 3.15) và giá trị tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt với các ống CNT phân bố đều UD là $T_{cr} \approx 5\, kN$ (Hình 3.16).

Hình 3.17 trình bày ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ và tỉ số $L/R_1$ tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt với các thông số hình học góc $R_1/h = 80$, hệ số nền đàn hồi $K_w = 0, K_p = 0$, tỉ lệ CNT $V^*_{CNT} = 0.12$ và kiểu phân bố FG-X. Khi tăng góc bán đỉnh từ $10^o \to 70^o$ nhận thấy giá trị của tải tới hạn $F_{cr}$ giảm dần. Cụ thể,

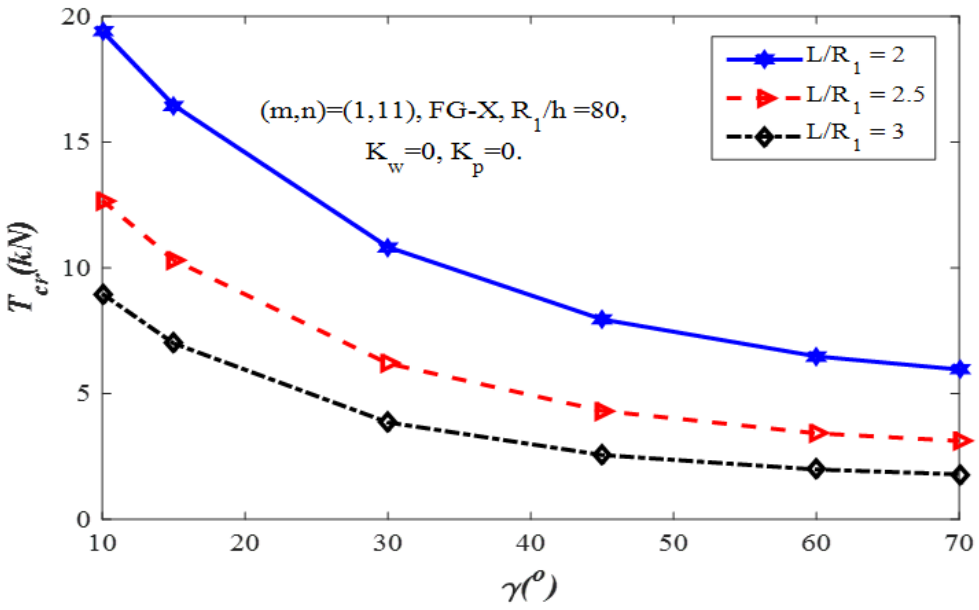
trong trường hợp $L/R_1 = 3$ với góc bán đỉnh $\gamma = 10^o$, tải tới hạn $F_{cr} \approx 9$ khi tăng góc bán đỉnh $\gamma = 70^o$, giá trị tải tới hạn $F_{cr}$ giảm xuống gần 4 lần.




***Hình 3.15:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-X*




***Hình 3.16:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt UD*




***Hình 3.17:*** *Ảnh hưởng của góc bán đỉnh và tỉ lệ $L/R_1$ tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC*

***Bảng 3.9:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ phân bố và loại phân bố CNT tới tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC*

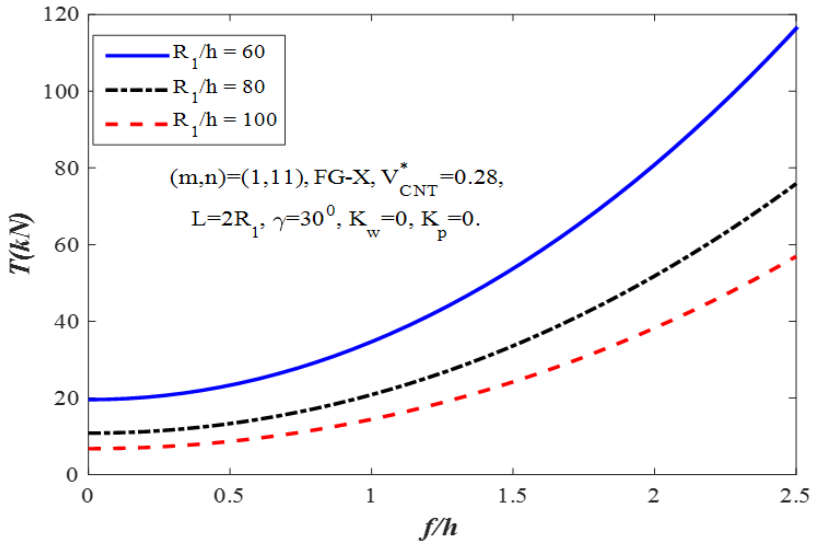
| Loại phân bố | $V^*_{CNT} = 0.12$ | $V^*_{CNT} = 0.17$ | $V^*_{CNT} = 0.28$ |
|---|---|---|---|
| FG-X | 21.665 | 31.639 | 51.179 |
| FG-O | 7.592 | 10.940 | 17.229 |
| UD | 14.624 | 21.283 | 34.237 |

Bảng 3.9 trình bày ảnh hưởng của tỉ thể tích CNT và các loại phân bố CNT khác nhau đến tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC. Các tham số hình học của các vỏ hình nón cụt là $(n, m) = (1, 11)$, $L/R_1 = 1$, $R_1/h = 80$, $\gamma = 30^o$, $K_{\mathrm{w}} = 0$, $K_p = 0$. Có thể thấy rằng, giá trị tải trọng tới hạn bị ảnh hưởng bởi nhiều bởi các loại phân bố CNT đặc biệt kiểu phân bố biến đổi tuyến tính. Giá trị tải trọng tới hạn của vỏ với kiểu phân bố FG-X là cao nhất và FG-O là thấp nhất. Cụ thể, trong trường hợp $V^*_{CNT} = 0.12$ giá trị tải trọng tới hạn của vỏ nón cụt FG-X là $T_{cr} = 21.665\,kN$, giá trị này chỉ là $(T_{cr} = 7.592\,kN)$ cho kểu FG-O.

Kết quả này được giải thích rằng, đặc trưng phân bố ứng suất trong kết cấu composite ở vùng gần mặt giữa là gần bằng không và ở mặt ngoài là lớn nhất. Do đó, trong trường hợp FG-X phần gia tăng tỉ lệ CNT tại mặt ngoài nơi có ứng suất lớn nhất và trường hợp FG-O gia cường CNT nhiều nhất ở mặt giữa nơi có phân bố ứng suất ít nhất. Vì vậy, độ cứng mất ổn định của vỏ trong trường hợp FG-X lớn hơn nhiều so với FG-O khi có cùng tỉ lệ thể tích CNT và dẫn tới giá trị tải trọng tới hạn lớn hơn.

*3.2.2.2. Kết quả phân tích sau tới hạn*

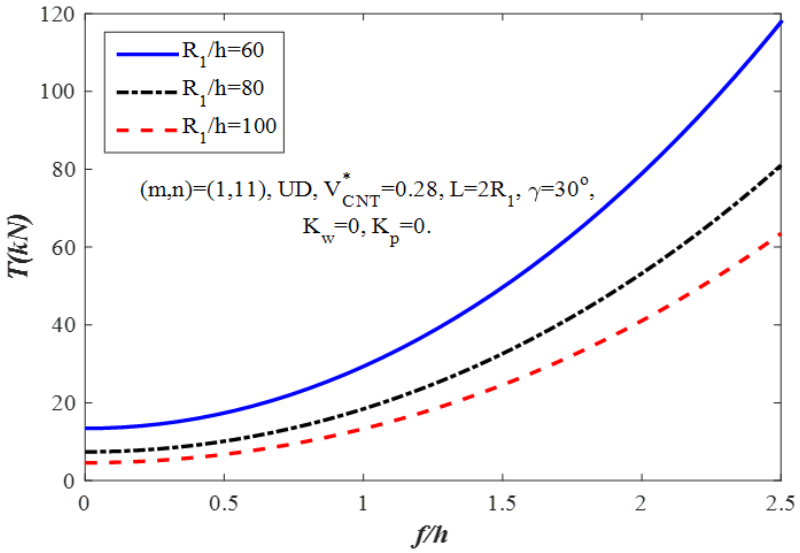
Kết quả phân tích trạng thái sau tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC thể hiện qua mối liên hệ giữa lực và tỉ lệ biên độ độ võng/độ dày trình bày trong phần này. Khảo sát ảnh hưởng của các thông số hình học và vật liệu đặc biệt là các thông số liên quan tới các ống nano carbon tới sự thay đổi đường cong sau tới hạn.




***Hình 3.18:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ $R_1/h$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-X*

Hình 3.18 và Hình 3.19 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ bán kính trên độ dày $(R_1/h)$ đến đường cong tải trọng-tỉ lệ biên độ độ võng/độ dày của vỏ nón cụt FG-

X (Hình 3.18) và UD (Hình 3.19) với cùng thông số hình học được thể hiện trong hình vẽ. Khảo sát ba trường hợp tỉ lệ bán kính trên độ dày $R_1/h = (60, 80, 100)$. Có thể thấy rằng, khi tỉ lệ $R_1/h$ tăng lên thì đường cong tải trọng – độ võng trở nên thấp hơn và ngược lại. Tương tự như trạng thái mất ổn định, khi tăng bán kính và giữ nguyên độ dày vỏ nón sẽ trở nên mỏng hơn dẫn đến độ cứng sau mất ổn định của vỏ giảm đi và khả năng chịu tải của vỏ thấp đi.

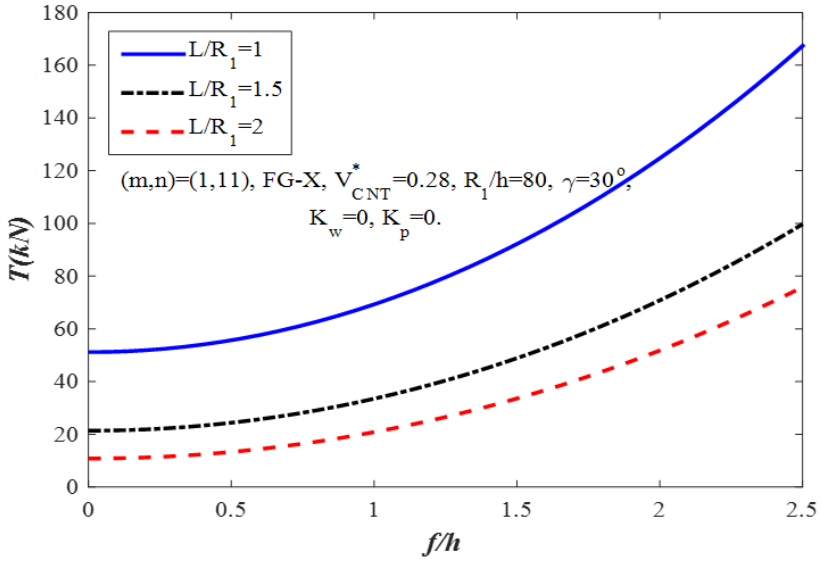



***Hình 3.19:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ $R_1/h$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt có CNT phân bố đều*

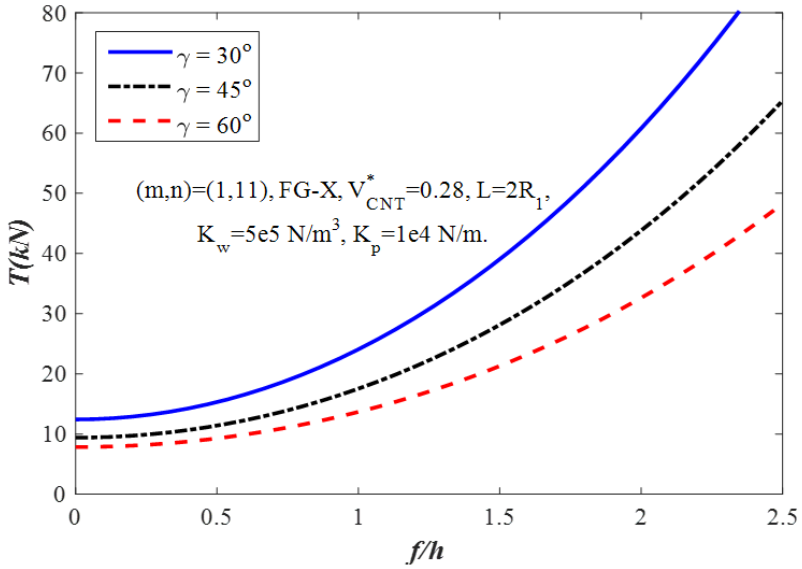
Hình 3.20 thể hiện ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dài trên bán kính nhỏ $(L/R_1)$ đến trạng thái sau tới hạn của vỏ nón cụt FG-CNTRC. Ba giá trị khác nhau về tỉ lệ chiều dài trên bán kính nhỏ $(L/R_1 = (1, 1.5, 2))$ được xem xét. Có thể quan sát thấy rằng, khi tăng tỉ lệ $L/R_1$ thì đường cong tải trọng-độ võng thấp dần đi. Cụ thể, khi giá trị tỉ lệ $L/R_1$ tăng lên từ $L/R_1 = 1$ tới $L/R_1 = 2$ thì đường cong tải trọng-độ võng giảm đáng kể.

Hình 3.21 biểu thị ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ tới đường cong tải trọng-biên độ độ võng trên độ dày của vỏ nón cụt FG–CNT trên nền đàn hồi. Ba trường hợp góc bán đỉnh được xem xét $\gamma = (30^o, 45^o, 60^o)$ với các thông số hình học được thể hiện trên hình. Từ hình cho thấy, góc bán đỉnh có ảnh hưởng tới

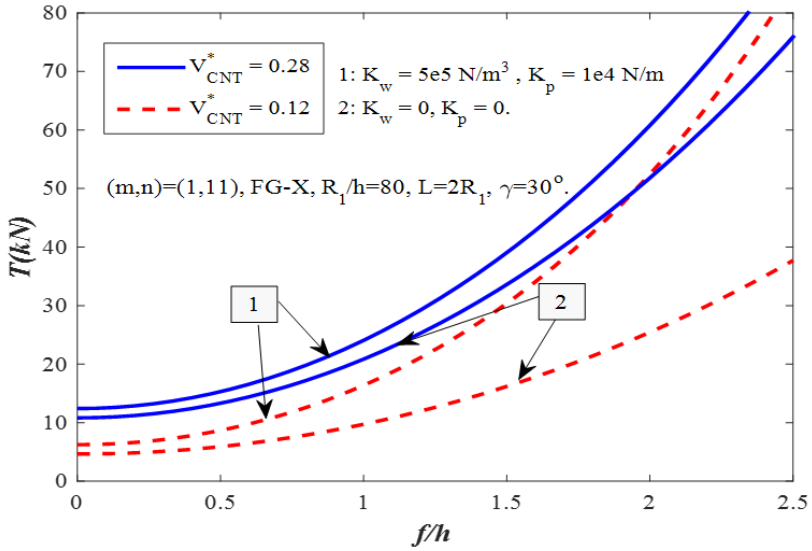
đường cong tải trọng độ võng của vỏ nón cụt. Việc tăng giá trị của góc bán đỉnh làm cho giá trị tải trọng của vỏ giảm nhẹ ở biên độ độ võng trên độ dày nhỏ và tương đối lớn với tỉ lệ biên độ độ võng trên độ dày từ 1 tới 2.5.




***Hình 3.20:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ $L/R_1$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-CNTRC*




***Hình 3.21:*** *Ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-CNTRC*




***Hình 3.22:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích tới đường cong tải trọng - tỉ lệ độ võng/chiều dày của vỏ nón cụt FG-CNTRC đặt trên nền đàn hồi*

Hình 3.22 thể hiện ảnh hưởng của nền đàn hồi tới đường cong tải trọng-tỉ lệ biên độ độ võng trên độ dày của vỏ nón cụt FG–CNT. Khảo sát ảnh hưởng của nền đàn hồi Pasternak với đặc trưng là hệ số nền $K_w \neq 0$và $K_p \neq 0$ và vỏ nón không đặt trên nền đàn hồi $K_w = K_p = 0$. Rõ ràng, vỏ nón đặt trên nền đàn hồi có khả năng chịu tải tốt hơn vỏ nón không đặt trên nền đàn hồi.

## 3.3. Kết luận chương 3

Luận án trình bày kết quả phân tích mất ổn định của tấm và vỏ FG-CNTRC sử dụng nguyên lý công ảo và Hamilton dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba kết hợp với tính phi tuyến hình học của von Kármán để thiết lập các phương trình cơ bản. Một số kết luận có thể rút ra như sau:

- Sử dụng phương pháp bán giải tích và mô phỏng số để phân tích bài toán mất ổn định của kết cấu composite gia cường FG-CNT. Đối với phương pháp bán giải tích, kết hợp phương pháp Galerkin, hàm ứng suất và cân bằng điều hòa để xác định nghiệm của bài toán và xác định phương trình

phân tích mất ổn định của tấm và vỏ.

- Xây dựng mô hình phần tử hữu hạn 3D trong phần mềm ABAQUS với chương trình con USDFLD người dung định nghĩa để mô phỏng sự phân bố của CNT biến đổi chức năng theo chiều dày của tấm.

- Sự gia cường của ống nano carbon trong kết cấu giúp tăng đáng kể giá trị tải trọng tới hạn cũng như khả năng chịu tải trong trạng thái mất ổn định và sau mất ổn định của tấm và vỏ composite gia cường FG-CNT.

- Tải trọng tới hạn của tấm và vỏ composite được cải thiện đáng kể trong mô hình phân bố FG-X với các ống nano carbon biến đổi tuyến tính theo chiều dày, có tỉ lệ thể tích nhiều nhất ở hai mặt ngoài và giảm dần vào mặt giữa.

- Các thông số hình học của tấm và vỏ, thông số nền đàn hồi có ảnh hưởng đáng kể tới giá trị tải trọng tới hạn trong phân tích mất ổn định và đường cong tải trọng-độ võng sau mất ổn định của tấm và vỏ composite gia cường FG-CNT.

# CHƯƠNG 4. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA TẤM VÀ VỎ FG-CNTRC

## 4.1. Phân tích dao động và đáp ứng động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC

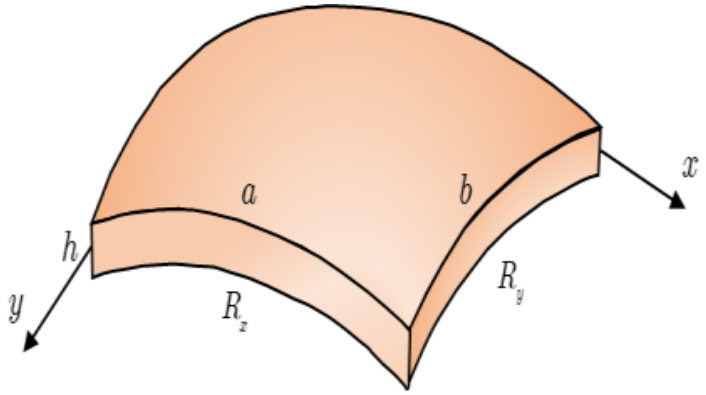
Phần này trình bày kết quả phân tích dao động và đáp ứng động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC sử dụng phương pháp bán giải tích với ba loại điều kiện biên khác nhau. Cụ thể như sau:

- Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt hình sin kết hợp với tính phi tuyến hình học của von Kármán làm cơ sở xây dựng phương trình chuyển động của vỏ hai độ cong FG-CNTRC dựa trên nguyên lý Hamilton.
- Lý thuyết biến dạng cắt sự dụng hàm phân bố hình sin và thỏa mãn các điều kiện của ứng suất tiếp tự do trên cả mặt trên và dưới của vỏ với gia thiết bốn bậc tự do gồm chuyển vị và góc quay tương ứng với bốn biến chưa biết cần xác định.
- Xét ba dạng nghiệm của chuyển vị và hàm ứng suất của vỏ hai độ cong tương ứng với ba điều kiện biên: tất cả các cạnh tựa đơn (SSSS), tất cả các cạnh ngàm (CCCC), hai cạnh tựa đơn và hai cạnh ngàm đối diện (CSCS).
- Sử dụng phương pháp Galerkin và hàm ứng suất Airy giải phương trình đạo hàm riêng của chuyển động. Áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 giải phương trình vi phân chuyển động cho phân tích đáp ứng động lực học.
- Xét hai mô hình vật liệu biến đổi chức năng gồm Mô hình I: Các ống CNT

biến đổi chức năng trong nền đồng nhất và Mô hình II: Vật liệu nền được tạo nên từ gốm và kim loại biến đổi chức năng được gia cường CNT.

### *4.1.1. Các phương trình cơ bản của vỏ hai độ cong FG-CNTRC*

Mô hình vỏ hai độ cong gia cường ống CNTs theo mô hình vật liệu Halpin-Tsai (Mục 2.4.2) với tổng chiều dày $h$, chiều dài $a$ và chiều rộng $b$ thể hiện trên Hình 4.1. Hệ trục tọa độ $(x,\, y,\, z)$ với mặt phẳng $(x,\, y)$ là mặt giữa của vỏ và chiều $z$ theo chiều dày của vỏ.




***Hình 4.1:*** *Mô hình vỏ hai độ cong*

Lý thuyết biến dạng cắt hình sin được đề xuất dựa trên cơ sở của lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 của Reddy với bốn bậc tự do. Các thành phần chuyển vị $u\,(x,y,z,t)$, $v\,(x,y,z,t)$, $w\,(x,y,z,t)$ tương ứng theo các hướng $x, y, z$ xác định theo công thức sau:

$$\begin{aligned} u\,(x,y,z,t) &= u_0\,(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + f\,(z)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v\,(x,y,z,t) &= v_0\,(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} + f\,(z)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w\,(x,y,z,t) &= w_0\,(x,y,t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

trong đó, $u_0\,(x,y,t)$, $v_0\,(x,y,t)$, $w_0\,(x,y,t)$ là chuyển vị tại mặt giữa, $\phi\,(x,y,t)$ là góc quay tương ứng tại $z=0$ ( $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$).

Trường chuyển vị được xác định thỏa mãn điều kiện biên ứng suất cắt ngang tự do tại mặt trên và dưới của vỏ ($\sigma_{xz}|_{z=\pm h/2} = \sigma_{xz}|_{z=\pm h/2} = 0$). Trong luận án này hàm $f(z) = -\frac{h}{\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{2}\right)$ được lựa chọn là hàm điều hòa để mô tả mối liên hệ phi tuyến giữa thành phần ứng suất tiếp và biến dạng cắt, với điều kiện xác định như sau: $f(z)\big|_{z=0} = 0$, $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=0} = 1$ và $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=\pm h/2} = 0$.

Mối quan hệ của các thành phần biến dạng và chuyển vị có xét tới tính phi tuyến hình học Von-Kármán cho vỏ hai độ cong FG-CNTRC được xác định như sau [87]:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Thay phương trình (4.1) vào phương trình (4.2) nhận được:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + zk^1 + f(z)\,k^3, \gamma = \gamma^0 + g(z)\,k^2 \tag{4.3}$$

trong đó,

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{w_0}{R_x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{w_0}{R_y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix}\gamma_{xz}^0\\ \gamma_{yz}^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$k^1 = \begin{pmatrix}k_x^1\\ k_y^1\\ k_{xy}^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{pmatrix}, k^2 = \begin{pmatrix}k_{xz}^2\\ k_{yz}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$k^3 = \begin{pmatrix}k_x^3\\ k_y^3\\ k_{xy}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{pmatrix}, g(z) = \frac{df(z)}{dz} - 1$$

Định luật Hooke thể hiện mối liên hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng của vỏ hai độ cong FG-CNTRC theo mô hình Halpin-Tsai (được trình bày

ở Mục 2.4.2) trong môi trường nhiệt độ được xác định như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} \tag{4.5}$$

trong đó, $Q_{11} = \frac{E}{1-v^2}, Q_{12} = \frac{vE}{1-v^2}, Q_{22} = \frac{E}{1-v^2}, Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+v)}$.

Các phương trình chuyển động của vỏ hai độ cong FG-CNTRC được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton như sau [87]:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K)\, dt = 0 \tag{4.6}$$

Biến phân của năng lượng biến dạng đàn hồi:

$$\delta U = \int_V \sigma\, \delta\varepsilon dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}\right) dz dA \tag{4.7}$$

Thay phương trình (4.3) vào phương trình (4.7) nhận được:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \sigma_x \left( \delta\varepsilon_x^0 + z\delta k_x^1 + f(z)\delta k_x^3 \right) + \sigma_y \left( \delta\varepsilon_y^0 + z\delta k_y^1 + f(z)\delta k_y^3 \right) \right. \\ & + \sigma_{xy} \left( \delta\gamma_{xy}^0 + z\delta k_{xy}^1 + f(z)\delta k_{xy}^3 \right) + \sigma_{xz} \left( \delta\gamma_{xz}^0 + g(z)\delta k_{xz}^2 \right) \\ & \left. + \sigma_{yz} \left( \delta\gamma_{yz}^0 + g(z)\delta k_{yz}^2 \right) \right) dz\, dA \\ = & \int_A \left( \left( N_x \delta\varepsilon_x^0 + M_x \delta k_x^1 + P_x \delta k_x^3 \right) \right. \\ & + \left( N_y \delta\varepsilon_y^0 + M_y \delta k_y^1 + P_y \delta k_y^3 \right) + \left( N_{xy} \delta\gamma_{xy}^0 + M_{xy} \delta k_{xy}^1 + P_{xy} \delta k_{xy}^3 \right) \\ & \left. + \left( Q_{xz} \delta\gamma_{xz}^0 + K_{xz} \delta k_{xz}^2 \right) + \left( Q_{yz} \delta\gamma_{yz}^0 + K_{yz} \delta k_{yz}^2 \right) \right) dA \end{aligned} \tag{4.8}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}(N_i, M_i, P_i) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i \left(1, z, f(z)\right) dz, \quad \{i = x, y, xy\} \\ (Q_i, K_i) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i \left(1, g(z)\right) dz, \qquad \{j = xz, yz\}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Thay phương trình (4.3) và (4.5) vào phương trình (4.9) ta có:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A] & [B] & [D] \\ [B] & [C] & [E] \\ [D] & [E] & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k^1 \\ k^3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^{th} \\ M^{th} \\ P^{th} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q \\ K \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A_s] & [C_s] \\ [C_s] & [E_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ k^2 \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{4.10}$$

trong đó,

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, [E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{12} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix},$$

$$[A_s] = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix}, [C_s] = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}, [E_s] = \begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix}$$

$$\left\{N^{th}\right\} = \left[N_x^{th}, N_y^{th}, 0\right]^T, \left\{M^{th}\right\} = \left[M_x^{th}, M_y^{th}, 0\right]^T, \left\{P^{th}\right\} = \left[P_x^{th}, P_y^{th}, 0\right]^T$$

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\left(1, z, z^2, f\left(z\right), zf\left(z\right), f^2\left(z\right)\right) dz, \ (i, j = 1, 2, 6)$$

$$\begin{pmatrix} A_{sij} \\ C_{sij} \\ E_{sij} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} \begin{pmatrix} 1 \\ g\left(z\right) \\ g^2\left(z\right) \end{pmatrix} dz, \ (ij = 44, 55)$$

$$\begin{pmatrix} N_x^{th} \\ M_x^{th} \\ P_x^{th} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(Q_{11}\alpha_{11} + Q_{12}\alpha_{22}\right)\Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f\left(z\right) \end{pmatrix} dz$$

$$\begin{pmatrix} N_y^{th} \\ M_y^{th} \\ P_y^{th} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(Q_{12}\alpha_{11} + Q_{22}\alpha_{22}\right)\Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f\left(z\right) \end{pmatrix} dz$$

Biến phân của thế năng do ngoại lực tác dụng là lực phân bố đều và lực nền đàn hồi được xác định như sau:

$$\delta V = -\int_A \left(q\delta w_0 - q_e\delta w_0\right) dA \tag{4.11}$$

Các thành phần biến phân của năng lượng biến dạng đàn hồi đã được xác định trong phương trình (4.7), biến phân của thế năng do ngoại lực tác dụng được xác định trong phương trình (4.11). Để xây dựng phương trình chuyển động của vỏ dựa trên nguyên lý Hamilton cần phải xác định được biến phân của động năng của các thành phần chuyển vị được xác định như sau:

$$\delta K = \int_V \rho\dot{u}\delta\dot{u}dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_z \left(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}\right) dzdA \tag{4.12}$$

$$\delta K = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_z \left(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}\right) dz dA = \int_A I_0 \left(\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0 + \dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right) dA$$
$$- I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\delta\dot{v}_0\right) + I_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right)$$
$$+ J_1 \left(\dot{u}_0 \left(\frac{\partial\delta\dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\right) + \delta\dot{u}_0 \left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right)$$
$$+ J_1 \left(\dot{v}_0 \left(\frac{\partial\delta\dot{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right) + \delta\dot{v}_0 \left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right)$$
$$- J_2 \left(\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right)$$
$$- J_2 \left(\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\dot{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right) + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right)$$
$$+ J_3 \left(\left(\frac{\partial\delta\dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\delta\dot{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right) \tag{4.13}$$

Trong đó, các moment quán tính được xác định như sau:

$$\{I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_3\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_z \left\{1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)\right\} dz \tag{4.14}$$

Thay các phương trình (4.8), (4.11), và (4.13) vào nguyên lý Hamilton trong phương trình (4.6) và qua các bước biến đổi tích phân từng phần cho phương trình trên nhận được phương trình Euler-Lagrange chuyển động (cân bằng).

Việc áp dụng tích phân từng phần trong trường hợp này nhằm mục đích hạ bậc của vi phân của chuyển vị ảo về thành chuyển vị ảo. Tích phân từng phần được áp dụng cho từng sô hạng (vi phân theo tọa độ hoặc thời gian). Các biểu thức trước các chuyển vị ảo là phương trình Euler-Lagrange cần tìm theo giả

thiết của nguyên lý Hamilton, số phương trình thu được tương ứng với số chuyển vị ảo của bài toán.

Phương trình Euler-Lagrange chuyển động nhận được như sau:

$$
\begin{aligned}
&\delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} = I_0\ddot{u}_0 + (J_1 - I_1)\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial x} \\
&\delta v_0 : N_{y,y} + N_{xy,x} = I_0\ddot{v}_0 + (J_1 - I_1)\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial y} \\
&\delta w_0 : \left(\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y}\right) + \left(M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy}\right) \\
&- \left(P_{x,xx} + P_{y,yy} + 2P_{xy,xy}\right) + \left(Q_{xz,x} + Q_{yz,y} + K_{xz,x} + K_{yz,y}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_y\frac{\partial w_0}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + q - q_e \\
&= I_0\ddot{w}_0 + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) - I_2\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) - J_1\left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}\right) \\
&+ J_2\left(2\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\phi}}{\partial x^2}\right) - J_3\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\phi}}{\partial y^2}\right) \\
&\delta\phi : \left(P_{x,xx} + 2P_{xy,xy} + P_{y,yy}\right) - \left(Q_{xz,x} + Q_{yz,y} + K_{xz,x} + K_{yz,y}\right) = \\
&J_1\left(\frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x}\right) + (J_3 - J_2)\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) + J_3\left(\frac{\partial^2 \ddot{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\phi}}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Trong luận án này giải bài toán tấm vỏ theo phương pháp hàm ứng suất, biểu diễn các thành phần nội lực qua một hàm ứng suất Airy $f(x, y, t)$ như sau:

$$
N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ N_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ N_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{4.16}
$$

Để xác định nghiệm hàm ứng suất cần xét điều kiện tương thích biến dạng sau:

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{1}{R_x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \tag{4.17}
$$

Các phương trình cơ bản của vỏ hai độ cong theo lý thuyết biến dạng cắt hình sin cho phân tích động lực học của vỏ hai độ cong gồm phương trình chuyển động (phương trình 4.15) và phương trình tương thích biến dạng (phương trình 4.17).

Thay phương trình hàm ứng suất Airy (4.16) vào phương trình phương trình tương thích biến dạng viết theo hàm ứng suất $f(x,y,t)$ như sau:

$$H_{11}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+H_{12}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}+H_{13}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+H_{14}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+H_{15}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+H_{16}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+H_{17}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}$$
$$+H_{18}\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}+H_{19}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\frac{1}{R_x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \tag{4.18}$$

trong đó,

$$H_{11}=\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}, H_{12}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}, H_{13}=\frac{1}{A_{66}}-\frac{2A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$$

$$H_{14}=\frac{A_{11}B_{12}-A_{12}B_{11}+A_{12}D_{11}-A_{11}D_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}, H_{17}=\frac{A_{12}D_{11}-A_{11}D_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$$

$$H_{15}=\frac{A_{22}B_{12}-A_{12}B_{22}+A_{12}D_{22}-A_{22}D_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}, H_{18}=\frac{A_{12}D_{22}-A_{22}D_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$$

$$H_{16}=\frac{A_{22}B_{11}-2A_{12}B_{12}+2A_{12}D_{12}-A_{11}D_{22}+A_{11}B_{22}-A_{22}D_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}-\frac{2B_{66}}{A_{66}}+\frac{2D_{66}}{A_{66}}$$

$$H_{19}=\frac{2A_{12}D_{12}-A_{11}D_{22}-A_{22}D_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}+\frac{2D_{66}}{A_{66}}$$

Thay các thành phần lực theo hàm ứng suất ở phương trình (4.16) vào hai phương trình đầu của hệ phương trình (4.15) dẫn tới:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}&=\frac{(I_1-J_1)}{I_0}\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}-\frac{J_1}{I_0}\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}&=\frac{(I_1-J_1)}{I_0}\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y}-\frac{J_1}{I_0}\frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial y}\end{aligned} \tag{4.19}$$

Thay hàm ứng suất trong phương trình (4.16) và phương trình (4.19) vào hai phương trình cuối của hệ phương trình (4.15) nhận được kết quả hệ phương trình chuyển động ở dạng đạo hàm riêng của hàm ứng suất, độ võng và góc quay theo toạ độ và thời gian, hệ phương trình chuyển động của vỏ hai độ cong FG-CNTRC được viết lại như sau:

$$
\begin{aligned}
&H_{17}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+H_{21}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}+H_{22}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+H_{23}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+H_{24}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+H_{25}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\\
&H_{26}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}+H_{27}\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}+H_{28}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2\partial y^2}+H_{29}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+H_{30}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+H_{29}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\\
&H_{30}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{1}{R_y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{1}{R_x}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+q\\
&-q_e=I_0\ddot{w}_0+I_1\left(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\right)-I_2\left(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}\right)-J_1\left(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\right)\\
&+J_2\left(2\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\ddot{\phi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\ddot{\phi}}{\partial x^2}\right)-J_3\left(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\ddot{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{\phi}}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&-H_{17}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-H_{18}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}-H_{19}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+H_{31}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+H_{32}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+H_{33}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\\
&+H_{34}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}+H_{35}\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}+H_{36}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2\partial y^2}+H_{37}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+H_{38}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+H_{37}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\\
&+H_{38}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=J_1\left(\frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}+\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}\right)+(J_3-J_2)\left(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2}\right)+J_3\left(\frac{\partial^2\ddot{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{\phi}}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

với các hệ số $H_{ij}$ $(i=2,3,j=0,...,9)$ được trình bày ở Phục lục A.3.

Phương trình tương thích biến dạng (4.18) và hai phương trình đạo hàm riêng chuyển động (4.20) và (4.21) là các phương trình dùng để phân tích động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong FG-CNTRC.

### *4.1.2. Các điều kiện biên và nghiệm phương trình*

Trong phần này trình bày dạng nghiệm của phương trình đạo hàm riêng được xác định thỏa mãn các điều kiện biên và các hệ số của các nghiệm này được xác định dựa trên phương pháp Galerkin cho ba trường hợp điều kiện biên (BC) của vỏ hai độ cong như sau:

***Trường hợp 1: Tựa đơn tất cả các cạnh (SSSS)***

Điều kiện biên tựa đơn tất cả các cạnh theo lý thuyết biến dạng cắt hình sin

cho các thành phần chuyển vị từ phương trình (4.1) là:

$$\begin{aligned}
&\text{Tại } x = 0, a: \\
&\qquad w_0 = 0, v_0 = 0, w_{,y} = 0, \phi_{,y} = 0, N_{xy} = 0, N_x = N_{x0}. \\
&\text{Tại } y = 0, b: \\
&\qquad w_0 = 0, u_0 = 0, w_{,x} = 0, \phi_{,x} = 0, N_{xy} = 0, N_y = N_{y0}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Nghiệm xấp xỉ thỏa mãn điều kiện biên tựa đơn tất cả các cạnh (phương trình 4.22) được tìm là:

$$\begin{bmatrix} w(x,y,t) \\ \phi(x,y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \\ \Phi(t) \sin \lambda_m x \sin \delta_n y \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

trong đó, $\lambda_m = m\pi/a$,$\delta_n = n\pi/b$, và $W(t), \Phi(t)$ là biên độ của chuyển vị và góc quay, tương ứng.

Dạng nghiệm hàm ứng suất $f(x,y,t)$ được tìm từ việc thoả mãn điều kiện biên tựa đơn (phương trình 4.22) và phương trình tương thích biến dạng (phương trình 4.21) dựa trên phương pháp cân bằng điều hòa bằng cách thay dạng nghiệm ở phương trình (4.23), cụ thể như sau:

$$f(x,y,t) = F_1 \cos 2\lambda_m x + F_2 \cos 2\delta_n y + F_3 \sin\lambda_m x \sin \delta_n y + \frac{1}{2} N_{xo} y^2 + \frac{1}{2} N_{yo} x^2 \tag{4.24}$$

trong đó, các hệ số $F_i (i = 1, 2, 3)$ như sau:

$$F_1 = \frac{1}{32} \frac{\delta_n^2}{\lambda_m^2 H_{11}} W(t)^2, F_2 = \frac{1}{32} \frac{\lambda_m^2}{\delta_n^2 H_{12}} W(t)^2, F_3 = F_{31} W(t) + F_{32} \Phi(t),$$

$$F_{31} = -\frac{\left(H_{14}\lambda_m^4 + H_{15}\delta_n^4 + H_{16}\delta_n^2\lambda_m^2\right) R_x R_y - \lambda_m^2 R_x - \delta_n^2 R_y}{\left(H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + H_{13}\lambda_m^2\delta_n^2\right) R_x R_y},$$

$$F_{32} = -\frac{H_{17}\lambda_m^4 + H_{18}\delta_n^4 + H_{19}\delta_n^2\lambda_m^2}{H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + H_{13}\lambda_m^2\delta_n^2}.$$

***Trường hợp 2: Ngàm tất cả các cạnh (CCCC)***

Điều kiện biên ngàm tất cả các cạnh theo lý thuyết hình sin, các thành phần

chuyển vị từ phương trình (4.1) là:

Tại $x = 0, a;\ y = 0, b$ :

$$w_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0, w_{0,x} = 0, w_{0,y} = 0, \phi_{,x} = 0, \tag{4.25}$$
$$\phi_{,y} = 0, N_x = N_{x0}, N_y = N_{y0}, N_{xy} = 0.$$

Nghiệm xấp xỉ thỏa mãn điều kiện biên ngàm tất cả các cạnh được tìm là:

$$\begin{bmatrix} w(x,y,t) \\ \phi(x,y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) \sin^2 \lambda_m x \sin^2 \delta_n y \\ \Phi(t) \sin^2 \lambda_m x \sin^2 \delta_n y \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Dạng nghiệm hàm ứng suất $f(x,y,t)$ được tìm từ việc thoả mãn điều kiện biên CCCC (phương trình 4.25) và phương trình tương thích biến dạng (phương trình 4.21) dựa trên phương pháp cân bằng điều hòa bằng cách thay dạng nghiệm ở phương trình (4.26), cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} f(x,y,t) = {} & F_1 \cos(2\lambda_m x) + F_2 \cos(2\delta_n y) + F_3 \cos(4\lambda_m x) + F_4 \cos(4\delta_n y) \\ & + F_5 \cos(2\lambda_m x)\cos(2\delta_n y) + F_6 \cos(2\lambda_m x)\cos(4\delta_n y) \\ & + F_7 \cos(4\lambda_m x)\cos(2\delta_n y) + \tfrac{1}{2} N_{xo} y^2 + \tfrac{1}{2} N_{yo} x^2 \end{aligned} \tag{4.27}$$

trong đó, các hệ số $F_i (i = 1, ..., 7)$ được xác định như sau:

$$F_1 = F_{11} W(t) + F_{12} W(t)^2 + \frac{1}{4}\frac{H_{17}}{H_{11}}\Phi(t), F_{11} = \frac{1}{32}\frac{\left(8H_{14}R_y\lambda_m^2 - 2\right)}{\lambda_m^2 R_y H_{11}}, F_{12} = \frac{1}{32}\frac{\delta_n^2}{\lambda_m^2 H_{11}}$$

$$F_2 = F_{21} W(t) + F_{22} W(t)^2 + \frac{1}{4}\frac{H_{18}}{H_{12}}\Phi(t), F_{21} = \frac{1}{32}\frac{\left(8H_{15}R_x\delta_n^2 - 2\right)}{\delta_n^2 R_x H_{12}}, F_{22} = \frac{1}{32}\frac{\lambda_m^2}{\delta_n^2 H_{12}}$$

$$F_3 = F_{31} W(t)^2, F_{31} = -\frac{1}{512}\frac{\delta_n^2}{\lambda_m^2 H_{11}}, F_4 = F_{41} W(t)^2, F_{41} = -\frac{1}{512}\frac{\delta_n^2}{\lambda_m^2 H_{12}}$$

$$F_5 = F_{51} W(t) + F_{52} W(t)^2 + F_{53}\Phi(t),$$

$$F_{51} = -\frac{1}{16}\frac{\left(4H_{14}R_xR_y\lambda_m^4 + 4H_{15}R_xR_y\delta_n^4 + 4H_{16}R_xR_y\delta_n^2\lambda_m^2 - R_x\lambda_m^2 - R_y\delta_n^2\right)}{R_xR_y\left(H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2\right)},$$

$$F_{52} = -\frac{1}{16}\frac{\lambda_m^2\delta^2}{H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2}, F_{53} = -\frac{1}{4}\frac{\left(H_{17}\lambda_m^4 + H_{18}\delta_n^4 + H_{19}\delta_n^2\lambda_m^2\right)}{H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2}$$

$$F_6 = F_{61}W(t)^2, F_{61} = \frac{1}{32}\frac{\lambda_m^2\delta_n^2}{H_{11}\lambda_m^4 + 16H_{12}\delta_n^4 + 4H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2},$$

$$F_7 = F_{71}W(t)^2, F_{71} = \frac{1}{32}\frac{\lambda_m^2\delta_n^2}{16H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + 4H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2}$$

***Trường hợp 3: Hai cạnh đối diện tựa đơn, hai cạnh đối diện ngàm (CSCS)***

Điều kiện biên theo lý thuyết hình sin, các thành phần chuyển vị từ phương trình (4.1) là:

Ngàm tại $x = 0, a$ :

$$\begin{aligned} &w_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0, w_{0,x} = 0, w_{0,y} = 0, \\ &\phi_{,x} = 0, \phi_{,y} = 0, N_{xy} = 0, N_x = N_{x0}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Tựa đơn tại $y = 0, b$ :

$$w_0 = 0, u_0 = 0, w_{,x} = 0, \phi_{,x} = 0, N_{xy} = 0, N_y = N_{y0}.$$

Nghiệm xấp xỉ được xác định như sau:

$$\begin{bmatrix} w(x,y,t) \\ \phi(x,y,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t)\sin^2\lambda_m x \sin\delta_n y \\ \Phi(t)\sin^2\lambda_m x \sin\delta_n y \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Dạng nghiệm hàm ứng suất $f(x,y,t)$ được tìm từ việc thoả mãn điều kiện biên CSCS (phương trình 4.28) và phương trình tương thích biến dạng (phương trình 4.21) dựa trên phương pháp cân bằng điều hòa bằng cách thay dạng nghiệm ở phương trình (4.29), cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} f(x,y,t) &= F_1\sin(\delta_n y) + F_2\cos(2\lambda_m x) + F_3\cos(2\delta_n y) + F_4\cos(4\lambda_m x) \\ &+ F_5\cos(2\lambda_m x)\sin(\delta_n y) + F_6\cos(2\lambda_m x)\cos(2\delta_n y) + \frac{1}{2}N_{xo}y^2 + \frac{1}{2}N_{yo}x^2, \end{aligned} \tag{4.30}$$

Các hệ số $F_i (i = 1, ..., 6)$ trong phương trình (4.30) được xác định bằng cách thay dạng nghiệm hàm ứng suất vào phương trình tương thích biến dạng và áp dụng phương pháp cân bằng điều hòa, cụ thể như sau:

$$F_1 = F_{11}W\left(t\right) + F_{12}\Phi\left(t\right), F_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\left(H_{15}R_x\delta_n^2 - 1\right)}{\delta_n^2 R_x H_{12}}, F_{12} = -\frac{1}{2}\frac{H_{18}}{H_{12}}$$

$$F_2 = F_{21}W(t)^2, F_{21} = \frac{1}{32}\frac{\delta_n^2}{\lambda_m^2 H_{11}}, F_3 = F_{31}W(t)^2, F_{31} = \frac{1}{32}\frac{\lambda_m^2}{\delta_n^2 H_{12}},$$

$$F_4 = F_{41}W(t)^2, F_{41} = -\frac{1}{512}\frac{\delta_n^2}{\lambda_m^2 H_{11}}, F_5 = F_{51}W\left(t\right) + F_{52}\Phi\left(t\right),$$

$$F_{51} = \frac{1}{2}\frac{\left(16H_{14}R_xR_y\lambda_m^4 + H_{15}R_xR_y\delta_n^4 + 4H_{16}R_xR_y\delta_n^2\lambda_m^2 - 4R_x\lambda_m^2 - R_y\delta_n^2\right)}{R_xR_y\left(16H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + 4H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2\right)},$$

$$F_{52} = \frac{1}{2}\frac{\left(16H_{17}\lambda_m^4 + H_{18}\delta_n^4 + 4H_{19}\delta_n^2\lambda_m^2\right)}{16H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + 4H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2},$$

$$F_6 = F_{61}W(t)^2, F_{61} = -\frac{1}{32}\frac{\lambda_m^2\delta_n^2}{H_{11}\lambda_m^4 + H_{12}\delta_n^4 + H_{13}\delta_n^2\lambda_m^2}.$$

### *4.1.3. Phương trình phân tích động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC*

Trong phần này xác định các phương trình cho phân tích dao động tự do, dao động cưỡng bức và đáp ứng động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC với ba trường hợp điều kiện biên.

Thay các nghiệm trong phương trình (4.23), (4.26), (4.29) và (4.24), (4.27), (4.30) tương ứng với 3 trường hợp điều kiện biên SSSS, CCCC, CSCS lần lượt vào phương trình (4.20), (4.21) và áp dụng phương pháp Galerkin thu được các phương trình sau:

$$\begin{aligned}&\left(G_1^1 + G_1^{11}N_{x0} + G_1^{12}N_{y0}\right)W\left(t\right) + G_1^2W(t)^2 + G_1^3W(t)^3 + G_1^4\Phi\left(t\right)\\&+ G_1^5W\left(t\right)\Phi\left(t\right) + G_1^6\left(\frac{N_{x0}}{R_x} + \frac{N_{y0}}{R_y} + q\right) = \overline{J_1^1}\frac{d^2W\left(t\right)}{dt^2} + \overline{J_1^2}\frac{d^2\Phi\left(t\right)}{dt^2}\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$G_2^1 W(t) + G_2^2 W(t)^2 + G_2^3 \Phi(t) = \overline{J_2^1}\frac{d^2 W(t)}{dt^2} + \overline{J_2^2}\frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} \tag{4.32}$$

với, $G_i^j \, (i = 1 \div 2, j = 1 \div 12), \overline{J}_i^j \, (i = 1 \div 2, j = 1 \div 2)$ tương ứng cho ba trường hợp điều kiện biên SSSS, CCCC, CSCS được trình bày trong Phụ lục A.3.

Hai phương trình (4.31), (4.32) là phương trình vi phân động học được sử dụng cho phân tích động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC với tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ, được tổng quát hoá cho ba trường hợp điều kiện biên SSSS, CCCC, và CSCS.

***Dao động tự do tuyến tính***

Dao động tự do của vỏ hai độ cong bỏ qua lực tác dụng ($N_{x0} = N_{y0} = q = 0$), phương trình (4.32) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} &G_1^1 W(t) + G_1^2 W(t)^2 + G_1^3 W(t)^3 + G_1^4 \Phi(t) + G_1^5 W(t)\Phi(t) \\ &- \overline{J_1^1}\frac{d^2 W(t)}{dt^2} - \overline{J_1^2}\frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} = 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$G_2^1 W(t) + G_2^2 W(t)^2 + G_2^3 \Phi(t) - \overline{J_2^1}\frac{d^2 W(t)}{dt^2} - \overline{J_2^2}\frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} = 0 \tag{4.34}$$

Tần số riêng nhận được bằng việc giải bài toán trị riêng của phương trình (4.33), (4.34), trong đó giá trị trị riêng nhỏ nhất ($\omega_0$) tương ứng được gọi là tần số cơ bản:

$$\begin{vmatrix} G_1^1 + \omega^2 \overline{J_1^1} & G_1^4 + \omega^2 \overline{J_1^2} \\ G_2^1 + \omega^2 \overline{J_2^1} & G_2^3 + \omega^2 \overline{J_2^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.35}$$

***Dao động tự do và dao động cưỡng bức phi tuyến***

Chọn hàm độ võng và lực phân bố đều có dạng hàm điều hòa phụ thuộc vào thời gian như sau $W = A_w \sin(\Omega t), q = Q_0 \sin(\Omega t)$. Mối quan hệ giữa tần số và biên độ của vỏ được xác định với việc đơn giản hóa tính toán bằng giả thiết lực quán tính gây ra bởi góc quay tương đối nhỏ và bỏ qua thành phần đạo hàm bậc cao theo thời gian của góc quay, thay $\Phi(t) = \frac{\overline{J_2^1}}{G_2^3}\frac{d^2 W(t)}{dt^2} - \frac{\left(G_2^1 W(t) + G_2^2 W(t)^2\right)}{G_2^3}$ từ

phương trình (4.32) vào phương trình (4.31):

$$\left[\left(\overline{J_1^1}-\frac{\overline{J_2^1}G_1^4}{G_2^3}\right)-\frac{\overline{J_2^1}G_1^5}{G_2^3}W\left(t\right)\right]\frac{d^2W\left(t\right)}{dt^2}=$$
$$\left(G_1^1-\frac{G_1^4G_2^1}{G_2^3}+G_1^{11}N_{x0}+G_1^{11}N_{y0}\right)W\left(t\right)+\left(G_1^2-\frac{G_1^4G_2^2}{G_2^3}-\frac{G_1^5G_2^1}{G_2^3}\right)W(t)^2 \quad (4.36)$$
$$+\left(G_1^3-\frac{G_1^5G_2^2}{G_2^3}\right)W(t)^3+G_1^6\left(\frac{N_{x0}}{R_x}+\frac{N_{y0}}{R_y}+Q_0\sin\Omega t\right)$$

Áp dụng phương pháp Galerkin ($\int_0^{2\pi/\Omega}$ (pt. 4.36) $\sin\left(\Omega t\right)dt$) cho phương trình (4.36) với $W=A_w\sin\left(\Omega t\right), q=Q_0\sin\left(\Omega t\right)$ xác định được tần số phi tuyến là hàm phụ thuộc vào biên độ độ võng:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_{mn}}\right)^2=\left[1+\frac{3}{4}M_1A_w^2-M_2\left(N_{x0}+N_{y0}\right)-M_3\frac{Q_0}{A_w}\right],$$
$$M_1=\frac{3}{4}\frac{\left(G_1^5G_2^2-G_1^3G_2^3\right)}{\left(G_1^2G_1^4-G_1^1G_2^3\right)},M_2=\frac{G_1^{11}G_2^3}{\left(G_1^2G_1^4-G_1^1G_2^3\right)},M_3=\frac{G_1^6G_2^3}{\left(G_1^2G_1^4-G_1^1G_2^3\right)}. \quad (4.37)$$

Tần số cơ bản nhận được từ phương trình (4.37) ($\omega_{mn}$):

$$\omega_{mn}=\sqrt{\frac{\left(G_1^4G_2^1-G_2^3G_1^1\right)}{\left(\overline{J_1^1}G_2^3-\overline{J_2^1}G_1^4\right)}} \quad (4.38)$$

Tần số cơ bản $\omega_{mn}$ xác định ở phương trình (4.38) xấp xỉ với kết quả tần số cơ bản ($\omega_0$) ở phương trình (4.35). Phần kết quả số sẽ trình bày kết quả so sánh giá trị hai tần số này để chứng minh giả thiết bỏ qua thành phần đạo hàm bậc cao của góc quay theo thời gian là hợp lý.

Mối quan hệ tần số và biên độ nhận được từ phương trình (4.38) với $Q_0=N_{x0}=N_{y0}=0$ như sau:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_{mn}}\right)^2=\left[1+\frac{3}{4}M_1A_w^2\right] \quad (4.39)$$

***Đáp ứng động lực học phi tuyến***

Mối quan hệ giữa độ võng và thời gian được xác định bằng việc giải hệ phương

trình vi phân chuyển động sau đây:

$$\begin{aligned}\overline{J_1^1}\frac{d^2W(t)}{dt^2}+\overline{J_1^2}\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2}&=\left(G_1^1+G_1^{11}N_{x0}+G_1^{11}N_{y0}\right)W(t)+G_1^2W(t)^2\\&+G_1^3W(t)^3+G_1^4\Phi(t)+G_1^5W(t)\Phi(t)+G_1^6\left(\frac{N_{x0}}{R_x}+\frac{N_{y0}}{R_y}+Q_0\sin\Omega t\right)\end{aligned}\tag{4.40}$$

$$\overline{J_2^1}\frac{d^2W(t)}{dt^2}+\overline{J_2^2}\frac{d^2\Phi(t)}{\partial t^2}=G_2^1W(t)+G_2^2W(t)^2+G_2^3\Phi(t)\tag{4.41}$$

Hệ phương trình vi phân trên được giải bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (trình bày ở Chương 2) nhằm khảo sát mối quan hệ độ võng - thời gian.

### *4.1.4. Kết quả và thảo luận*

Thông số hình học của vỏ hai độ cong được lựa chọn như sau: $m=n=1$, $a/b=1$, $b/h=10$, $Q_0=6000(N/m^2)$, $a/R_x=0.25$, $b/R_y=0.25$. Thông số hình học của ống CNTs $d_{CNT}=1.36e-9\,(m)$, $l_{CNT}=9.26e-9\,(m)$, $t_{CNT}=0.067e-9\,(m)$, $W_{CNT}=1\%$. Tính chất vật liệu nền FGM và ống CNTs được trình bày trong Bảng 2.1.

#### *4.1.4.1. Kết quả so sánh*

Kết quả so sánh tần số cơ bản không thứ nguyên của tấm FGM với điều kiện biên SSSS và CCCC được trình bày trong Bảng 4.1 với kết quả của tác giả Uymaz và Aydogdu [112] sử dụng lý thuyết 3D kết hợp với phương pháp Ritz và kết quả của tác giả Nguyen cùng các cộng sự [78] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao xây dựng phương trình và giải bằng phương pháp Ritz. Thông số sử dụng là $\varpi=\frac{\omega_0 ab}{\pi^2 h}\sqrt{\frac{12(1-v^2)\rho_m}{E_m}}$, $(m,n)=(1,1)\,, a=b=1, a/h=10$, và $b/R_x=b/R_y=0$.

Bảng 4.2 so sánh tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ trụ FGM dưới điều kiện biên SSSS với kết quả của các tác giả Aragh và Hedayati [21] sử dụng lý thuyết 3D; Matsunaga [69] sử dụng lý thuyết cắt bậc cao; tác giả Quân và công

sự [84] sử dụng lý thuyết FSDT; tác giả Farid và công sự [41] sử dụng lý thuyết 3D; tác giả Shen và Wang [95] sử dụng lý thuyết cắt bậc ba.

***Bảng 4.1:*** *Tần số cơ bản không thứ nguyên của tấm FGM với điều kiện biên SSSS và CCCC*

| BC | Tài liệu | $N$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0.5 | 1 | 5 | 10 | $\infty$ |
| SSSS | 3D [112] | 1.9339 | 1.7406 | 1.6583 | 1.5491 | 1.5066 | 1.3861 |
| | FEM [78] | 1.9325 | 1.7385 | 1.6589 | 1.5501 | 1.5091 | - |
| | Luận án | 1.9849 | 1.7932 | 1.7067 | 1.5768 | 1.5397 | 1.4222 |
| CCCC | 3D [112] | 3.3496 | 3.0249 | 2.8809 | 2.6645 | 2.5923 | 2.4009 |
| | FEM [78] | 3.3219 | 2.9974 | 2.8582 | 2.6463 | 2.5760 | - |
| | Luận án | 3.3680 | 3.0588 | 2.9076 | 2.6378 | 2.5721 | 2.4142 |

***Bảng 4.2:*** *Tần số cơ bản không thứ nguyên* $\varpi = \omega_0 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ *của panel trụ* $(m,n) = (1,1)\,, a = b = 1, b/h = 5, b/R_y = 0$

| $b/R_x$ | $N$ | [21] | [69] | [84] | [41] | [95] | Luận án |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0 | 0.2129 | 0.2153 | 0.2162 | 0.2113 | 0.2169 | 0.2080 |
| | 0.5 | 0.1817 | 0.1855 | 0.1754 | 0.1814 | 0.1799 | 0.1786 |
| | 1 | 0.1638 | 0.1678 | 0.1484 | 0.1639 | 0.1589 | 0.1530 |
| | 4 | 0.1374 | 0.1413 | 0.1369 | 0.1367 | 0.1301 | 0.1325 |
| | 10 | 0.1296 | 0.1328 | 0.1183 | 0.1271 | 0.1204 | 0.1258 |
| 1 | 0 | 0.2154 | 0.2239 | 0.2169 | 0.2164 | 0.2329 | 0.2133 |
| | 0.5 | 0.1848 | 0.1945 | 0.1860 | 0.1879 | 0.1944 | 0.1861 |
| | 1 | 0.1671 | 0.1769 | 0.1589 | 0.1676 | 0.1732 | 0.1704 |
| | 4 | 0.1391 | 0.1483 | 0.1373 | 0.1394 | 0.1402 | 0.1462 |
| | 10 | 0.1300 | 0.1380 | 0.1187 | 0.1286 | 0.1286 | 0.1366 |

Bảng 4.3 trình bày kết quả so sánh tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ hai độ cong FGM với kết quả trong tài liệu [14] sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển và tài liệu [30] và [35] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất.

***Bảng 4.3:*** *So sánh tần số cơ bản không thứ nguyên* $\varpi = \omega_0 h\sqrt{\rho_c/E_c}$ *của vỏ hai độ cong FGM* $(m,n) = (1,1)\,, a = b = 1, b/h = 10.$

| $a/R_x$ | $b/R_y$ | $N$ | Tài liệu [14] | Tài liệu[30] | Tài liệu [35] | Luận án |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.5 | 0 | 0.0779 | 0.0762 | 0.0761 | 0.0695 |
| | | 0.5 | 0.0676 | 0.0664 | 0.0662 | 0.0618 |
| | | 1 | 0.0617 | 0.0601 | 0.0605 | 0.0572 |
| | | 4 | 0.0519 | 0.0503 | 0.0506 | 0.0482 |
| | | 10 | 0.0482 | 0.0464 | 0.0467 | 0.0438 |
| 0.5 | -0.5 | 0 | 0.0597 | 0.0563 | 0.0577 | 0.0546 |
| | | 0.5 | 0.0506 | 0.0479 | 0.049 | 0.0412 |
| | | 1 | 0.0456 | 0.0432 | 0.0442 | 0.0371 |
| | | 4 | 0.0396 | 0.0372 | 0.0381 | 0.0322 |
| | | 10 | 0.0380 | 0.0355 | 0.0364 | 0.0310 |

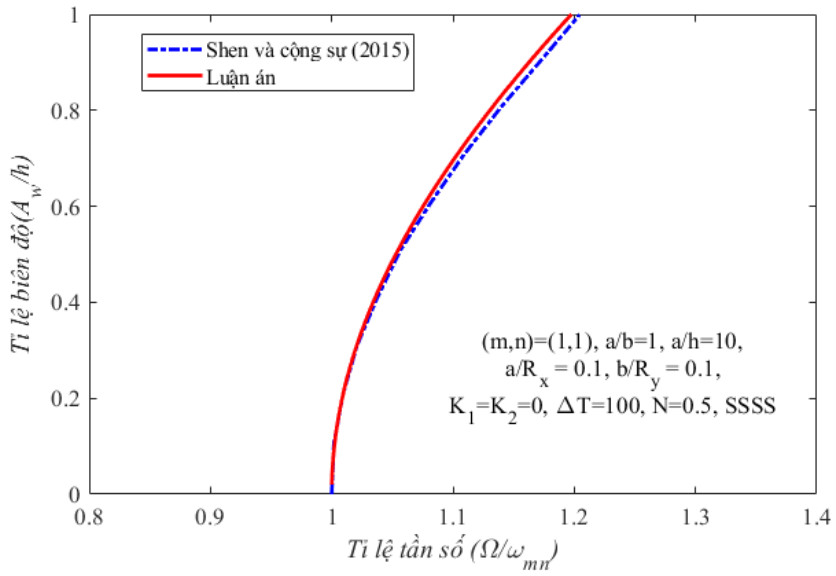
***Bảng 4.4:*** *So sánh tần số cơ bản của tấm gia cường FG-CNTs đặt trên nền đàn hồi* $(m,n) = (1,1)\,, a/h = 15, N_L = 5, a/b = 1, W_{CNT} = 0.1\,(\%)\,, a/R_x = 0, b/R_y = 0$

| $K_1, K_2$ | Nền PMMA | | | | Nền PmPV | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Tài liệu [54] | | Luận án | | Tài liệu [54] | | Luận án | |
| | UD | FG-X | UD | FG-X | UD | FG-X | UD | FG-X |
| (0,0) | 2768 | 3245 | 2832 | 3350 | 2537 | 2974 | 2596 | 3070 |
| (2,0) | 6515 | 6731 | 6522 | 6764 | 6420 | 6605 | 6423 | 6629 |
| (2,0.05) | 8541 | 8707 | 8534 | 8720 | 8469 | 8610 | 8458 | 8616 |

Bảng 4.4 trình bày kết quả so sánh tần số cơ bản của tấm gia cường FG-

CNTs đặt trên nền đàn hồi với kết quả trong tài liệu [54]. Tài liệu [54] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy trong khi đó luận án này sử dụng lý thuyết biến dạng cắt hình sin và cùng sử dụng phương pháp Galerkin để giải phương trình đạo hàm riêng nhằm xác định tần số riêng.

Hình 4.2 trình bày kết quả so sánh đường cong mối quan hệ giữa tỉ lệ biên độ trên độ dày ($A_w/h$) và tỉ lệ tần số ($\Omega/\omega_{mn}$) của dao động tự do phi tuyến đối của vỏ hai độ cong FG-CNTRC với điều kiện biên SSSS. Có thể thấy rằng kết quả phân tích trong luận án có sai số không đáng kể với nghiên cứu trong của tác giả Shen và cộng sự [93].




***Hình 4.2:*** *So sánh đường cong $A_w/h$-$\Omega/\omega_{mn}$ của tấm FG-CNTRC*

*4.1.4.2. Dao động tự do*

Phần này trình bày kết quả tần số riêng tuyến tính cho vỏ hai độ cong đặt trên nền đàn hồi. Hai mô hình vật liệu chức năng được khảo sát:

- Mô hình 1: Sự phân bố biến đổi chức năng của các ống CNT (FG-CNT) trong vật liệu nền gồm (Model 1-a) và nền kim loại (Model I-b). Vỏ được chia thành nhiều lớp với sự phân bố của tỉ lệ CNT trong mỗi lớp là khác

nhau và tạo thành sự phân bố biến đổi chức năng cho toàn bộ vỏ với ba mô hình: Phân bố đều (UD), phân bố CNT nhiều nhất ở hai mặt ngoài và bằng không ở lớp giữa (FG-X), phân bố CNT bằng không ở hai mặt ngoài và nhiều nhất ở giữa (FG-O).

- Mô hình 2: Sự phân biến đổi chức năng ở vật liệu nền được tạo từ gốm và kim loại biến đổi đều qua chiều dày của kết cấu (FGM) với sự gia cường các ống CNT phân bố đều trong lớp nền FGM.

***Bảng 4.5:*** *Sự hội tụ của tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ kim loại hai độ cong gia cường ống CNTs*

| $N_L$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | UD | FG-O | FG-X | UD | FG-O | FG-X |
| 5 | 0.0530 | 0.0528 | 0.0533 | 0.0764 | 0.0762 | 0.0766 |
| 6 | 0.0530 | 0.0528 | 0.0533 | 0.0764 | 0.0762 | 0.0767 |
| 7 | 0.0530 | 0.0528 | 0.0533 | 0.0764 | 0.0762 | 0.0766 |
| 8 | 0.0530 | 0.0527 | 0.0533 | 0.0764 | 0.0761 | 0.0767 |
| 9 | 0.0530 | 0.0527 | 0.0533 | 0.0764 | 0.0761 | 0.0767 |
| 10 | 0.0530 | 0.0527 | 0.0533 | 0.0764 | 0.0761 | 0.0767 |

***Bảng 4.6:*** *Sự hội tụ của tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ gốm hai độ cong gia cường ống CNTs*

| $N_L$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | UD | FG-O | FG-X | UD | FG-O | FG-X |
| 5 | 0.0520 | 0.0520 | 0.0521 | 0.0751 | 0.0750 | 0.0752 |
| 6 | 0.0520 | 0.0519 | 0.0521 | 0.0751 | 0.0750 | 0.0752 |
| 7 | 0.0520 | 0.0519 | 0.0521 | 0.0751 | 0.0750 | 0.0752 |
| 8 | 0.0520 | 0.0519 | 0.0521 | 0.0751 | 0.0750 | 0.0752 |
| 9 | 0.0520 | 0.0519 | 0.0521 | 0.0751 | 0.0750 | 0.0752 |
| 10 | 0.0520 | 0.0519 | 0.0521 | 0.0751 | 0.0750 | 0.0752 |

Trong trường hợp Mô hình I, để phân tích bài toán động lực học, cần xét đến sự hội tụ của tần số. Sự hội tụ này phụ thuộc vào số lượng các lớp nhằm đảm bảo rằng sự phân bố CNTs biến đổi chức năng với số lớp đủ nhiều. Bảng 4.5 và 4.6 trình bày kết quả hội tụ của tần số cơ bản không thứ nguyên ($\omega = \omega_0 h\sqrt{\rho_{matrix}/E_{matrix}}$) dưới các điều kiện biên khác nhau cho nền kim loại và gốm, tương ứng. Từ các kết quả được trình bày trong các bảng này, số lớp được chọn cho trường hợp FG-CNT để phân tích là $N_L = 8$.

***Bảng 4.7:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ gốm hai độ cong (Model I-a)*

| $W^{\%}_{CNT}$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | UD | FG-O | FG-X | UD | FG-O | FG-X |
| 0 | 0.0517 | 0.0517 | 0.0517 | 0.0746 | 0.0746 | 0.0746 |
| 0.1 | 0.0520 | 0.0519 | 0.0521 | 0.0751 | 0.0750 | 0.0752 |
| 0.2 | 0.0524 | 0.0522 | 0.0526 | 0.0756 | 0.0754 | 0.0758 |
| 0.5 | 0.0534 | 0.0530 | 0.0539 | 0.0771 | 0.0766 | 0.0775 |
| 1 | 0.0551 | 0.0543 | 0.0560 | 0.0796 | 0.0786 | 0.0804 |
| 2 | 0.0585 | 0.0568 | 0.0601 | 0.0845 | 0.0824 | 0.0859 |
| 5 | 0.0682 | 0.0640 | 0.0719 | 0.0985 | 0.0932 | 0.1010 |
| 10 | 0.0836 | 0.0759 | 0.0907 | 0.1207 | 0.1102 | 0.1242 |

Bảng 4.7 và 4.8 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích và các loại phân bố của CNT đối với tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ hai độ cong chịu các điều kiện biên khác nhau, tương ứng với nền gốm (Model I-a) và nền kim loại (Model I-b). Kết quả chỉ ra rằng việc tăng phần trăm CNT dẫn đến tăng tần số của vỏ hai độ cong. Giá trị thấp nhất của tần số cơ bản không thứ nguyên quan sát được khi $W_{CNT} = 0\,(\%)$, tương đương với trường hợp vỏ hai độ cong là đồng nhất, không có CNT.

Hơn nữa, trong số ba loại phân bố CNT, loại FG-X CNTs cho thấy tần số cơ

bản không thứ nguyên cao nhất, trong khi loại FG-O CNTs có tần số thấp nhất. Điều này được giải thích là do loại FG-X có tỉ lệ thể tích CNT cao nhất ở khu vực gần hai mặt ngoài, nơi chịu lực lớn nhất của vỏ tương ứng với sự phân bố ứng suất là nhiều nhất và sự phân bố CNT thấp nhất ở mặt giữa tương ứng với nơi có sự phân bố ứng suất ít nhất, trong khi loại FG-O có tỉ lệ thể tích CNT ngược lại so với FG-X ở các vùng trên.

***Bảng 4.8:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ kim loại hai độ cong (Model I-b)*

| $W^{\%}_{CNT}$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | UD | FG-O | FG-X | UD | FG-O | FG-X |
| 0 | 0.0518 | 0.0518 | 0.0518 | 0.0746 | 0.0746 | 0.0746 |
| 0.1 | 0.0530 | 0.0527 | 0.0533 | 0.0764 | 0.0761 | 0.0767 |
| 0.5 | 0.0580 | 0.0565 | 0.0593 | 0.0835 | 0.0820 | 0.0846 |
| 1 | 0.0639 | 0.0610 | 0.0663 | 0.0920 | 0.0888 | 0.0937 |
| 2 | 0.0750 | 0.0696 | 0.0796 | 0.1080 | 0.1014 | 0.1103 |
| 5 | 0.1058 | 0.0944 | 0.1170 | 0.1525 | 0.1366 | 0.1547 |
| 10 | 0.1545 | 0.1396 | 0.1808 | 0.2229 | 0.1964 | 0.2271 |

Bảng 4.9 trình bày các kết quả tần số cơ bản của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường ống nano carbon (Mô hình II) với các sự thay đổi tỉ lệ CNTs. Trong Mô hình II, ống nano carbon được phân bố đều trong nền gốm ($N = 0$, tương đương với trường hợp UD trong Mô hình I-a), nền kim loại ($N = \infty$, trường hợp này tương đương với trường hợp ống nano carbon phân bố theo kiểu UD trong Mô hình I-b), và nền FGM ($N = 1$, sự phân bố biến đổi đều của các thành phần gốm và kim loại theo độ dày). Nhìn chung, với việc chọn lớp hội tụ $N_L$ như trình bày trong Bảng 4.6 và 4.7, có thể thấy rằng càng nhiều sự có mặt của ống nano carbon trong nền càng giúp gia tăng tần số cơ bản của vỏ. Trường hợp nền gốm có tần số cơ bản cao nhất do module cao hơn so với nền kim loại.

***Bảng 4.9:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới tần số cơ bản $\omega_0\,(rad/s)$ của vỏ hai độ cong CNTs-FGDCS (Model II)*

| $W_{CNT}(\%)$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ceramic (N=0) | FGM (N=1) | Metal (N=$\infty$) | Ceramic (N=0) | FGM (N=1) | Metal (N=$\infty$) |
| 0 | 12672 | 7587 | 5219 | 18263 | 10849 | 7521 |
| 0.5 | 13231 | 8321 | 6017 | 19069 | 11962 | 8671 |
| 1 | 13776 | 9002 | 6757 | 19854 | 12969 | 9738 |
| 2 | 14832 | 10278 | 8130 | 21375 | 14851 | 11716 |
| 5 | 17801 | 13753 | 11836 | 25653 | 19955 | 17055 |
| 10 | 22393 | 19087 | 17604 | 32269 | 27242 | 25365 |

***Bảng 4.10:*** *Ảnh hưởng điều kiện biên BCs và các loại phân bố CNTs tới tần số không thứ nguyên của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNTs (Model I-b: $W_{CNT} = 1\,(\%)$)*

| BCs | UD | FG-O | FG-X |
|---|---|---|---|
| SSSS | 0.0639 | 0.0610 | 0.0663 |
| CSCS | 0.0668 | 0.0641 | 0.0691 |
| CCCC | 0.0920 | 0.0888 | 0.0937 |

Bảng 4.10 so sánh tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNT (Model I-b) với 3 điều kiện biên: Trường hợp 1: Giả sử tất cả các cạnh tự đơn (SSSS); Trường hợp 2: Giả sử tất cả các cạnh ngàm (CCCC); Trường hợp 3: Giả sử hai cạnh đối diện ngàm và hai cạnh tựa đơn (CSCS). Kết quả phân tích cho thấy trường hợp điều kiện biên CCCC có tần số cơ bản cao nhất. Điều này xảy ra do các cạnh ngàm có chức năng như các giá đỡ cố định hạn chế mọi biến dạng của vỏ tại các cạnh đó, do đó làm tăng độ cứng và tần số cơ bản của vỏ.

***Bảng 4.11:*** *Ảnh hưởng sự phân bố CNTs và tỉ lệ chiều dài trên bán kính đến tần số cơ bản không thứ nguyên của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNT trên nền đàn hồi (Mô hình I-b:* $W_{CNT} = 1\,(\%)\,, K_1 = 2\,GPa/m, K_2 = 0.1\,GPa.m$*)*

| $a/R_x$ | $b/R_y$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | UD | FG-O | FG-X | UD | FG-O | FG-X |
| 0 | 0 | 0.0749 | 0.0724 | 0.0770 | 0.1052 | 0.1024 | 0.1067 |
| 0.25 | 0 | 0.0764 | 0.0740 | 0.0785 | 0.1063 | 0.1035 | 0.1078 |
| 0.25 | 0.25 | 0.0809 | 0.0787 | 0.0829 | 0.1077 | 0.1049 | 0.1091 |
| 0.5 | 0.5 | 0.0968 | 0.0950 | 0.0986 | 0.1147 | 0.1121 | 0.1161 |

***Bảng 4.12:*** *Ảnh hưởng các loại nền và tỉ lệ chiều dài trên bán kính đến tần số cơ bản của vỏ hai độ cong gia cường UD-CNT (Mô hình II:* $W_{CNT} = 1\%$*)*

| $a/R_x$ | $b/R_y$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Gốm ($N=0$) | FGM ($N=1$) | Kim loại ($N=\infty$) | Gốm ($N=0$) | FGM ($N=1$) | Kim loại ($N=\infty$) |
| 0 | 0 | 11873 | 7580 | 5651 | 18888 | 12081 | 8991 |
| 0.25 | 0 | 12309 | 7884 | 5859 | 19165 | 12266 | 9123 |
| 0.25 | 0.25 | 13533 | 8693 | 6442 | 19498 | 12487 | 9282 |
| 0.5 | 0.5 | 17597 | 11335 | 8377 | 21224 | 13610 | 10104 |

Bảng 4.11 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dài trên bán kính và ba loại phân bố của CNT tới tần số cơ bản không thứ nguyên $\omega_0$ của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNTs (Model I-b) điều kiện biên SSSS và CCCC. Bảng 4.12 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dài trên bán kính tới tần số cơ bản $(\omega_0(rad/s))$ của vỏ hai độ cong với nền kim loại, gốm và FGM gia cường UD-CNT (Model II) với điều kiện biên SSSS và CCCC. Cả hai bảng trình bày kết quả tần số cơ bản cho tấm, panel trụ và vỏ hai độ cong. Trường hợp $R_x, R_y \to \infty \left(a/R_x = b/R_y = 0\right)$ đại diện cho dạng hình học của tấm, $R_x > 0, R_y \to \infty \left(a/R_x \neq 0, b/R_y = 0\right)$ đại diện cho dạng hình học của panel hình trụ và $R_x > 0, R_y > 0 \left(a/R_x \neq 0, b/R_y \neq 0\right)$

được trình bày cho vỏ hai độ cong. Quan sát thấy rằng tần số cơ bản của vỏ hai độ cong $\left(a/R_x \neq 0, b/R_y \neq 0\right)$ là cao hơn so với panel trụ $\left(a/R_x \neq 0, b/R_y = 0\right)$ trong khi tần số cơ bản của panel hình trụ cao hơn của tấm $\left(a/R_x = b/R_y = 0\right)$. Sự khác biệt về tần số cơ bản này được cho là do ảnh hưởng của độ cong, dẫn đến độ cứng và tần số cơ bản cao hơn trong vỏ. Độ cong cho phép vỏ phân bố tải trọng đều hơn trên bề mặt so với tấm và panel trụ.

***Bảng 4.13:*** *Ảnh hưởng $\Delta T$ và tỉ lệ $a/h$ tới tần số cơ bản $\omega_0$ (rad/s) của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II: $W_{CNT} = 1\%$)*

| $\Delta T$ | $a/h$ | SSSS | | | CCCC | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Gốm ($N$=0) | FGM ($N$=1) | Kim loại ($N = \infty$) | Gốm ($N$=0) | FGM ($N$=1) | Kim loại ($N = \infty$) |
| 0 | 10 | 13533 | 8693 | 6442 | 19498 | 12487 | 9282 |
| | 15 | 7013 | 4507 | 3337 | 9756 | 6239 | 4642 |
| | 20 | 4532 | 2915 | 2157 | 5897 | 3770 | 2805 |
| 100 | 10 | 13394 | 8614 | 6395 | 19298 | 12375 | 9214 |
| | 15 | 6941 | 4466 | 3313 | 9656 | 6183 | 4608 |
| | 20 | 4485 | 2888 | 2141 | 5836 | 3736 | 2785 |
| 300 | 10 | 13157 | 8405 | 6174 | 18956 | 12069 | 8896 |
| | 15 | 6818 | 4358 | 3199 | 9485 | 6029 | 4449 |
| | 20 | 4406 | 2819 | 2067 | 5733 | 3643 | 2689 |

Bảng 4.13 trình bày ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ ($\Delta T$) và tỉ lệ chiều dài trên độ dày ($a/h$) tới tần số cơ bản của vỏ hai độ cong FGM gia cường UD-CNT (Mô hình II). Tần số cơ bản của vỏ bị ảnh hưởng bởi cả tỉ lệ chiều dài trên độ dày và sự gia tăng nhiệt độ. Khi tỉ lệ $a/h$ tăng tương ứng với vỏ mỏng đi, tần số cơ bản sẽ giảm tương ứng. Cụ thể, với sự gia tăng nhiệt độ, tần số cơ bản của vỏ FGM với $a/h = 10$ là $\omega_0 = 8693\left(rad/s\right)$, thấp hơn gần ba lần so với $a/h = 20$. Ngoài ra, tần số cơ bản của vỏ được xác định bởi các đặc tính vật liệu của nó, các đặc tính này có thể thay đổi theo nhiệt độ. Nhìn chung, khi độ

cứng vật liệu của vỏ tăng lên, tần số cơ bản của vỏ cũng tăng lên. Do đó, khi nhiệt độ giảm làm cho độ cứng của vật liệu tăng lên dẫn tới tần số cơ bản của vỏ tăng lên. Ngược lại, khi nhiệt độ tăng làm cho độ cứng vật liệu giảm đi dẫn tới tần số cơ bản giảm.

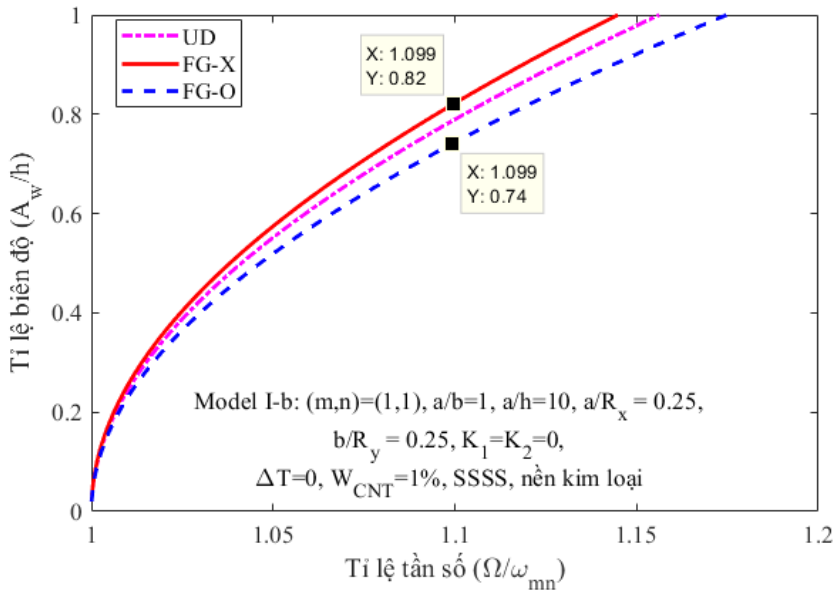
*4.1.4.3. Dao động cưỡng bức*

Trong phần này, nghiên cứu trình bày kết quả phân tích dao động tự do và dao động cưỡng bức phi tuyến, xác định mối quan hệ giữa biên độ và tỷ số tần số ($\Omega/\omega_{mn}$) của vỏ hai độ cong được gia cường bởi CNTs với hai mô hình vật liệu (Mô hình I và Mô hình II) được trình bày trong phần trước. Tần số riêng của dao động phi tuyến được trình bày dưới dạng là hàm của biên độ và được tính toán bằng phương trình (4.37) đối với dao động cưỡng bức và phương trình (4.39) đối với dao động tự do.

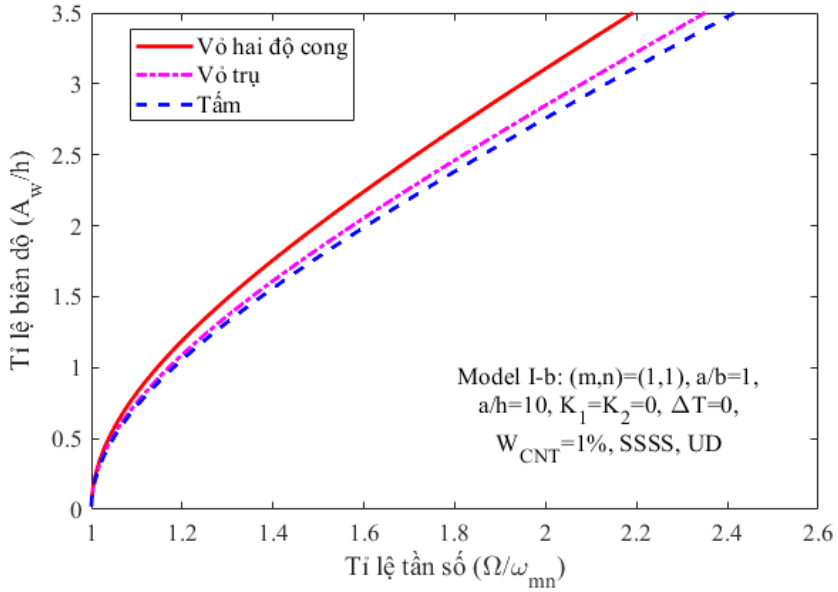
***Bảng 4.14:*** *So sánh hai công thức tần số cơ bản cho vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNT (Model I-b)*

| BCs | Tần số $\omega_0$ từ phương trình 4.35 | | | Tần số $\omega_{mn}$ từ phương trình 4.38 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | UD | FG-O | FG-X | UD | FG-O | FG-X |
| SSSS | 0.0639 | 0.0610 | 0.0663 | 0.0642 | 0.0613 | 0.0666 |
| SCSC | 0.0668 | 0.0641 | 0.0691 | 0.0672 | 0.0645 | 0.0694 |
| CCCC | 0.0920 | 0.0888 | 0.0937 | 0.0924 | 0.0893 | 0.0940 |

Bảng 4.14 so sánh tần số cơ bản không thứ nguyên $\omega = (\omega_0, \omega_{mn})\, h\sqrt{\rho_{me}/E_{me}}$, trong đó $\omega_0$ là giá trị thấp nhất trong bài toán giá trị riêng và $\omega_0$ được tính từ phương trình (4.35), trong khi $\omega_{mn}$ được tính từ phương trình (4.38) với giả thiết đạo hàm bậc cao của góc quay bị bỏ qua. Kết quả này cho thấy sự khác biệt giữa giá trị tần số từ hai phương pháp này là khoảng 0,5 %. Như vậy, có thể sử dụng được cả hai công thức ở phương trình (4.35) và phương trình (4.38) để xác định tần số cơ bản của vỏ hai độ cong FG-CNTRC.




***Hình 4.3:*** *Ảnh hưởng của các loại phân bố CNT tới đường cong biên độ tần số của dao động tự do phi tuyến cho vỏ hai độ cong nền kim loại (Model I-b)*

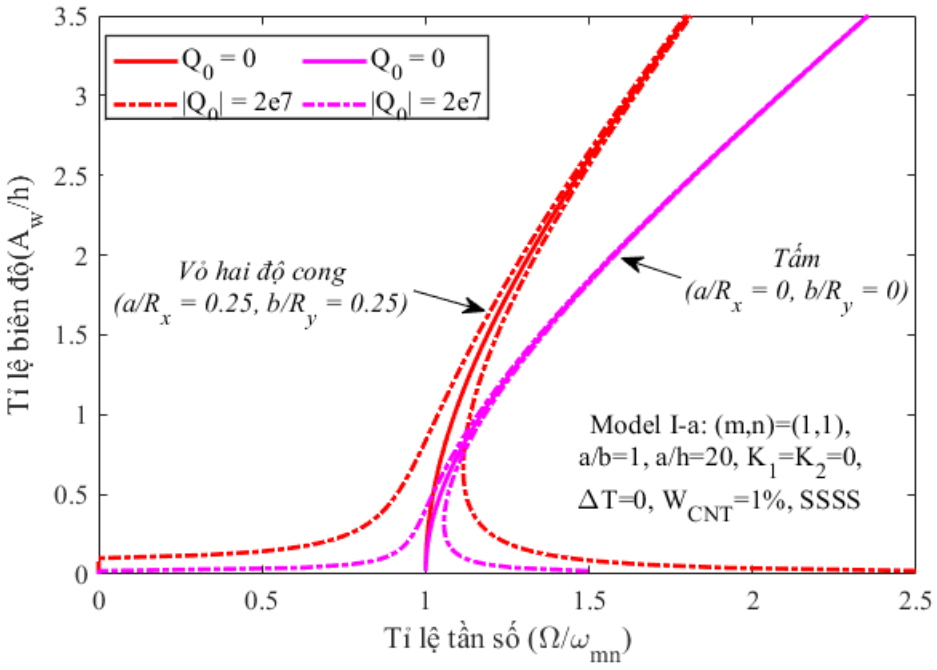



***Hình 4.4:*** *So sánh đường cong biên độ-tần số của tấm, panel trụ, và vỏ hai độ cong (Model I-b)*

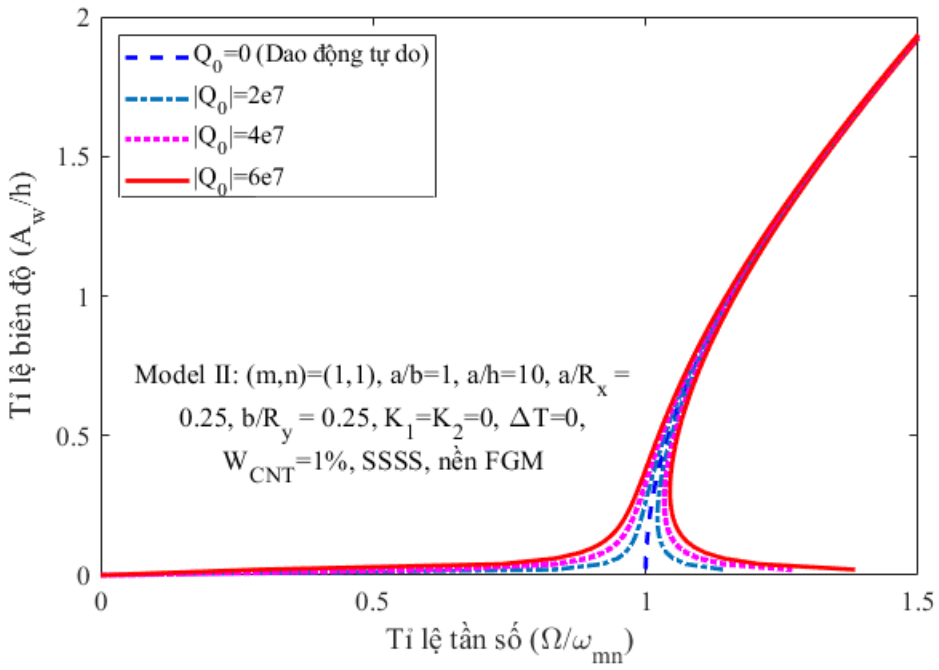
Hình 4.3 thể hiện ảnh hưởng của ba loại phân bố CNT đến mối quan hệ giữa tỷ số biên độ trên độ dày $(A_w/h)$ và tỷ số tần số $(\Omega/\omega_{mn})$ của dao động tự do

phi tuyến của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNT với điều kiện biên SSSS (Model I-b). Có thể thấy rằng đường cong tỉ lệ biên độ-tần số của vỏ với loại phân bố FG-X lớn hơn đường cong của vỏ có CNT phân bố điều (UD), và đường cong của vỏ gia cường FG-O CNT là thấp nhất. Xét trường hợp cụ thể, khi $\Omega/\omega_{mn} \approx 1.1$, tỉ lệ biên độ trên độ dày $(A_w/h)$ cho loại phân bố FG-X, UD, và FG-O lần lượt là 0.82, 0.78, 0.74.

Hình 4.4 và 4.5 trình bày tỉ lệ biên độ-tần số của dao động tự do và dao động cưỡng bức phi tuyến của tấm, panel trụ, và vỏ hai độ cong tương ứng. Trong Hình 4.4 xét mô hình vật liệu là Mô hình I-b với CNT phân bố đều trong nền kim loại và Mô hình I-a xét CNT phân bố theo loại FG-X trong nền gốm. Rõ ràng là đường cong tỉ lệ biên độ-tần số của vỏ hai độ cong cao hơn tấm và panel trụ. Sự giải thích về sự khác biệt này cũng tương ứng như sự giải thích về tần số riêng trong nhận xét của Bảng 4.11 và Bảng 4.12.




***Hình 4.5:*** *Ảnh hưởng của biên độ lực ngoài tới đường cong biên độ tần số của dao động phi tuyến cho vỏ hai độ cong và tấm FG-X CNT gia cường nền gốm (Model I-a)*




***Hình 4.6:*** *Ảnh hưởng của biên độ lực ngoài tới đường cong biên độ tần số của dao động phi tuyến cho vỏ hai độ cong FGM với CNT phân bố đều(Model II)*

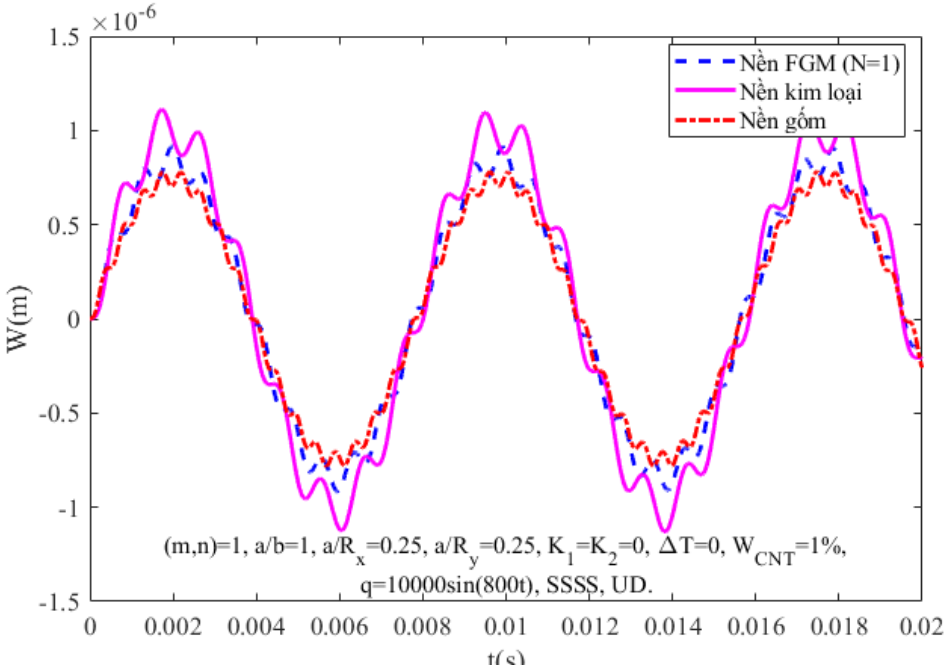
Hình 4.6 thể hiện ảnh hưởng của biên độ ($Q_0$) của ngoài lực tới tỉ lệ biên độ-tần số của dao động cưỡng bức phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường UD-CNTs với các cạnh tựa đơn (SSSS) (Mô hình II). Trong trường hợp $Q_0 = 0$ thể hiện dao động tự do phi tuyến, trong khi $Q_0 \neq 0$ thể hiện dao động cưỡng bức phi tuyến. Kết quả chỉ ra rằng đường cong tỉ lệ biên độ tần số của vỏ hai độ cong tăng với biên độ lực ngoài tăng.

*4.1.4.4. Đáp ứng động lực học*

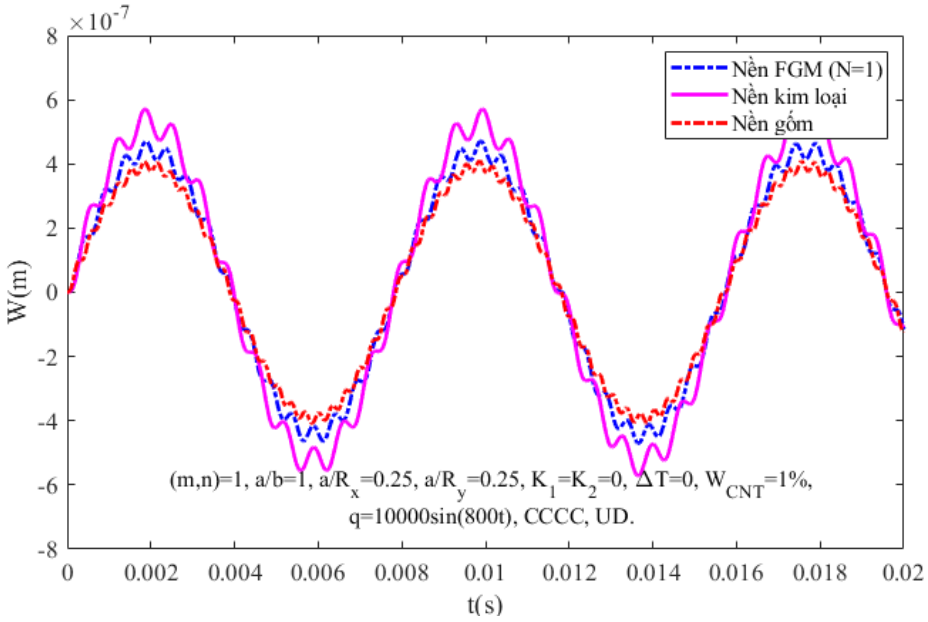
Phần này trình bày kết quả số phân tích đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong gia cường CNTs sử dụng phương pháp bán giải tích với hai mô hình vật liệu biến đổi chức năng (Mô hình I và Mô hình II).

Hình 4.7 và 4.8 trình bày ảnh hưởng của các loại nền khác nhau tới đáp ứng động lực học phi tuyến tính của vỏ hai độ cong gia cường CNTs với điều kiện

biên SSSS và CCCC. Ba loại nền được khảo sát gồm nền gốm (khi $N = 0$, tương đương với vỏ hai độ cong gia cường UD CNTs trong Mô hình I-a), nền kim loại (khi $N = \infty$, tương đương với vỏ hai độ cong gia cường UD CNTs Mô hình I-b) và nền FGM (khi$N = 1$, biểu thị sự phân bố biến đổi đều của thành phần gốm và kim loại theo độ dày). Kết quả thể hiện rằng đường cong biên độ và thời gian ($W\,(m) - t\,(s)$) của vỏ hai độ cong nền kim loại cao hơn vỏ hai độ cong nền FGM, trong khi đường cong biên độ độ võng – thời gian của vỏ hai độ cong nền gốm là thấp nhất. Kết quả module đàn hồi được trình bày trong Bảng 2.1 giải thích cho sự khác biệt về đường cong độ võng-thời gian trong các trường hợp khác nhau là do ảnh hưởng của các module đàn hồi. Cụ thể, nền gốm có các module đàn hồi vượt trội so với kim loại, dẫn đến độ cứng của vỏ nền gốm cao hơn nền kim loại và đường cong độ võng - thời gian sẽ thấp hơn. Ngược lại, module đàn hồi của nền FGM nằm giữa gốm và kim loại nên độ cứng và biên độ độ võng - thời gian nằm ở giữa hai loại nền còn lại.




***Hình 4.7:*** *Ảnh hưởng của các loại nền khác nhau tới đường cong biên độ-thời gian của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường CNT với điều kiện biên SSSS (Model II)*

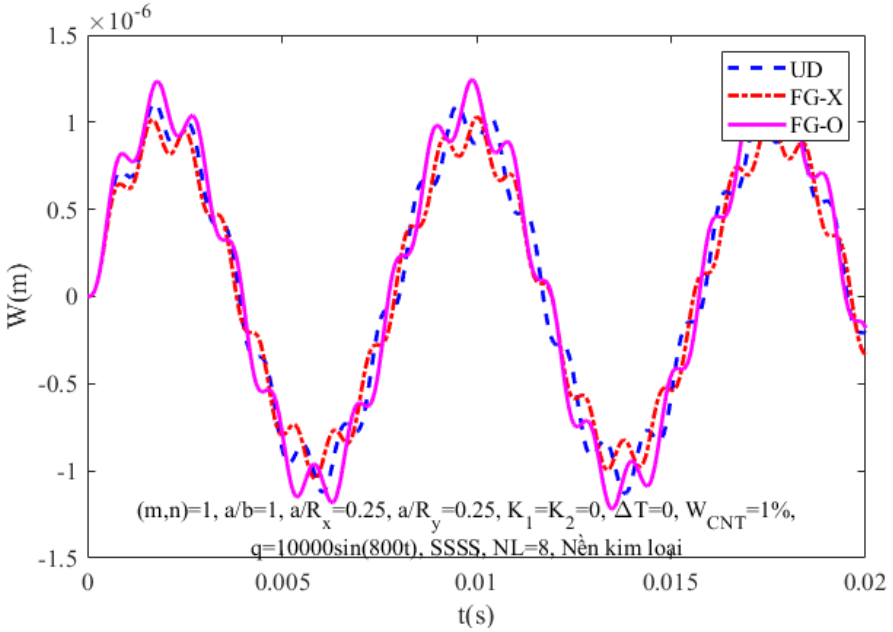



***Hình 4.8:*** *Ảnh hưởng của các loại nền khác nhau tới đường cong biên độ-thời gian của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường CNT với điều kiện biên CCCC (Model II)*

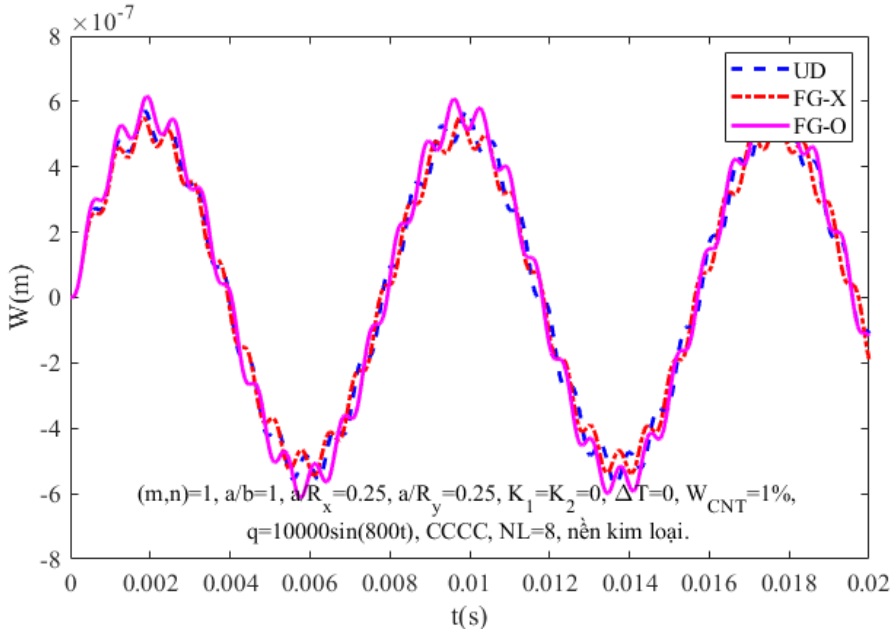
Hình 4.9 và Hình 4.10 phân tích ảnh hưởng của sự phân bố CNT tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền kim loại gia cường FG-CNT (Model I-b) tương ứng với điều kiện biên SSSS và CCCC. Kết quả chỉ ra rằng kiểu phân bố FG-X (có đặc trưng tỉ lệ thể tích CNT nhiều nhất ở hai mặt ngoài và ít nhất ở mặt giữa của vỏ, tương ứng sự phân bố ứng suất thấp nhất ở giữa và nhiều nhất ở hai mặt ngoài) có tần số cơ bản cao nhất và đường cong biên độ - thời gian thấp nhất. Ngược lại, kiểu phân bố FG-O (có tỉ lệ thể tích ít nhất ở hai mặt ngoài và nhiều nhất ở mặt giữa) có tần số cơ bản thấp nhất và đường cong biên độ - thời gian cao nhất.

Ảnh hưởng của nhiệt độ tới đường cong biên độ - thời gian của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường UD CNTs (Mô hình II) được thể hiện trong Hình 4.11. Hai trường hợp sự gia tăng nhiệt độ $\Delta T = (0, 300)\, K$ được khảo sát cho điều kiện biên SSSS và CCCC. Khi nhiệt độ tăng, đường cong độ võng thời gian $(W\,(m) - t\,(s))$ tăng lên, cho thấy khả năng chịu tải của vỏ trở nên yếu đi. Có thể giải thích là

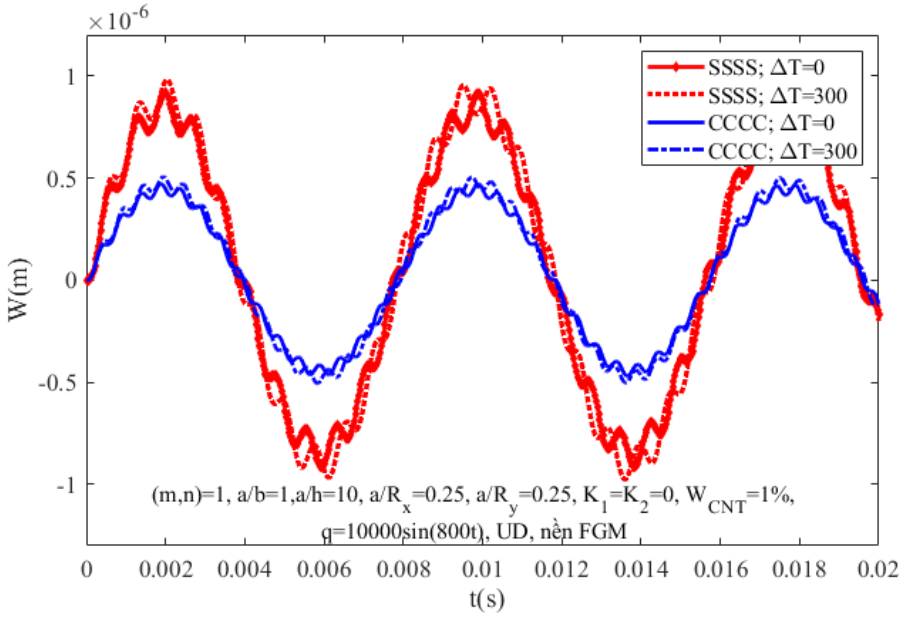
do độ cứng của vỏ hai độ cong phụ thuộc vào đặc tính vật liệu, và các đặc tính vật liệu giảm đi khi nhiệt độ tăng lên.



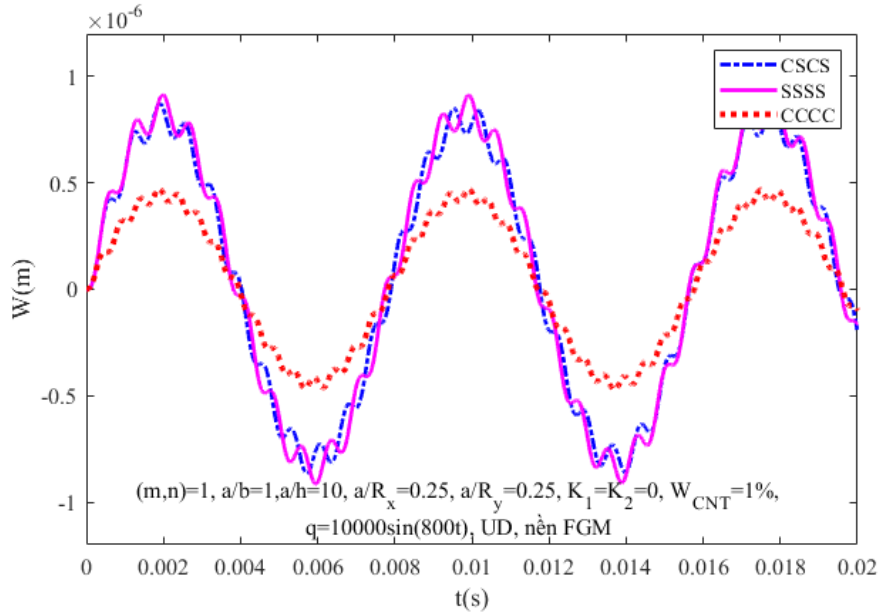

***Hình 4.9:*** *Ảnh hưởng của các loại phân bố CNT tới đáp ứng động lực học phi tuyến cho vỏ hai độ cong nền kim loại với điều kiện biên SSSS*




***Hình 4.10:*** *Ảnh hưởng của các loại phân bố CNT tới đáp ứng động lực học phi tuyến cho vỏ hai độ cong nền kim loại với điều kiện biên CCCC*



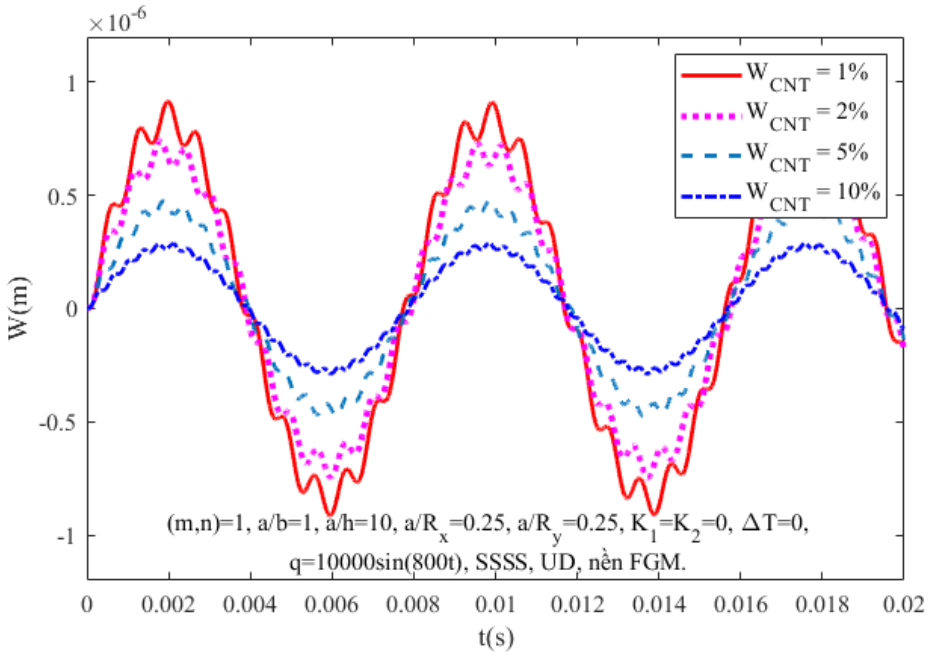

***Hình 4.11:*** *Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II)*




***Hình 4.12:*** *Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II)*

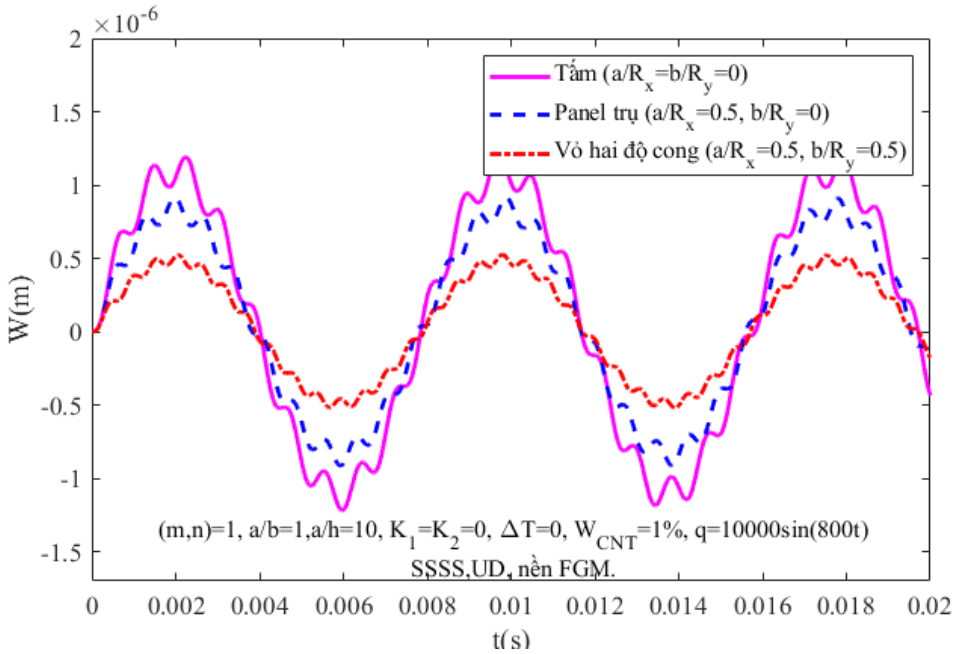
Hình 4.12 so sánh đáp ứng động lực học phi tuyến với ba trường hợp điều kiện biên của vỏ hai độ cong. Trường hợp 1: Tất cả các cạnh của vỏ tựa đơn

(SSSS), trường hợp 2: Tất cả các cạnh ngàm (CCCC) và trường hợp 3: hai cạnh đối diện tựa đơn trong khi hai cạnh còn lại ngàm (CSCS). Kết quả cho thấy đường cong biên độ - thời gian của vỏ với điều kiện biên CCCC là thấp hơn so với vỏ trong điều kiện biên CSCS, chứng tỏ vỏ trong điều kiện CCCC có thể chịu dao động tốt hơn so với vỏ trong điều kiện biên CSCS. Ngoài ra, đường cong biên độ - thời gian của vỏ trong điều kiện biên SSSS là cao nhất tương ứng trường hợp này kém hiệu quả nhất trong việc chống lại dao động.




***Hình 4.13:*** *Ảnh hưởng của sự gia tăng nhiệt độ tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM (Model II)*

Hình 4.13 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ CNTs tới đáp ứng động lực học phi tuyến của vỏ hai độ cong nền FGM gia cường UD CNTs (Mô hình II). Đường cong độ võng - thời gian có xu hướng giảm khi tỉ lệ thể tích của CNT tăng lên, sự có mặt của CNT trong nền giúp tăng cường độ cứng của vỏ và giảm biên độ võng. Kết quả này có thể là do các tính chất cơ học vượt trội của CNTs như độ bền và độ cứng cao lớn hơn nhiều so với vật liệu nền. Nhìn chung, kết quả thể hiện rằng việc bổ sung CNTs có thể cải thiện đáng kể các tính chất cơ học của vỏ hai độ cong giúp vỏ có khả năng chống dao động tốt hơn.




***Hình 4.14:*** *So sánh đường cong biên độ độ võng-thời gian cho tấm, panel trụ, và vỏ hai độ cong nền FGM (Model II)*

Hình 4.14 trình bày ảnh hưởng của các hình dạng hình học (tỉ lệ chiều dài trên bán kính $a/R_x, b/R_y$ ) tới đường cong độ võng - thời gian của vỏ hai độ cong FGM gia cường UD-CNTs với điều kiện biên SSSS (Mô hình II). Trong đó, trường hợp $a/R_x = b/R_y = 0$ đại diện cho dạng hình học của tấm, $a/R_x = 0.5, b/R_y = 0$ đại diện cho dạng hình học của panel trụ và $a/R_x = b/R_y = 0,5$ đại diện cho vỏ hai độ cong. Kết quả cho thấy đường cong biên độ thời gian của tấm cao hơn so với panel trụ và vỏ hai độ cong.

## 4.2. Phân tích dao động tự do và đáp ứng động lực học của vỏ nón cụt FG-CNTRC

Phần này trình bày kết quả tần số riêng và mối liên hệ biên độ động võng - thời gian trong phân tích động lực của vỏ nón cụt FG-CNTRC đặt trên nền đàn hồi với tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ. Cụ thể như sau:

- Sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển cùng với tính phi tuyến hình học thiết lập phương trình chuyển động của vỏ nón cụt.

- Các phương trình đạo hàm riêng chuyển động của vỏ được giải bằng phương pháp Galerkin và hàm ứng suất Airy. Sau đó, phương trình vi phân chuyển động được giải bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4.

- Nghiệm hàm ứng suất được xác định cho bài toán phi tuyến hình học của vỏ nón cụt bao gồm cả thành phần phi tuyến với các hệ số tìm được bằng phương pháp cân bằng điều hòa.

- Nghiên cứu ảnh hưởng của các thông số hình học, các loại phân bố CNT (FG, UD), tỉ lệ thể tích CNT, nền đàn hồi đến đường cong đáp ứng động lực học và tần số riêng vỏ nón cụt FG-CNTRC.

### *4.2.1. Phương trình phân tích động lực học*

Phương trình tương thích biến dạng của vỏ nón cụt FG-CNTRC được xác định như sau:

$$\begin{aligned}&\frac{\cot\gamma}{S}\frac{\partial^2 w}{\partial S^2}-\frac{1}{S}\frac{\partial^2\gamma^0_{S\theta}}{\partial S\partial\varphi}-\frac{1}{S^2}\frac{\partial\gamma^0_{S\theta}}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\varepsilon^0_\theta}{\partial S^2}+\frac{1}{S^2}\frac{\partial^2\varepsilon^0_S}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{S}\frac{\partial\varepsilon^0_\theta}{\partial S}-\frac{1}{S}\frac{\partial\varepsilon^0_S}{\partial S}=\\&=\frac{1}{S^4}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{2}{S^3}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial S\partial\varphi}-\frac{1}{S^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial S^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial S\partial\varphi}\right)^2\right]-\frac{1}{S}\frac{\partial w}{\partial S}\frac{\partial^2 w}{\partial S^2}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Phương trình chuyển động của vỏ nón cụt FG-CNTRC được xây dựng theo lý thuyết vỏ cổ điển như sau [100]:

$$\begin{aligned}&S\frac{\partial N_S}{\partial S}+\frac{\partial N_{S\theta}}{\partial\varphi}+N_S-N_\theta=\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\&\frac{\partial N_\theta}{\partial\varphi}+S\frac{\partial N_{S\theta}}{\partial S}+2N_{S\theta}=\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\&S\frac{\partial^2 M_S}{\partial S^2}+2\frac{\partial M_S}{\partial S}+2\left(\frac{\partial^2 M_{S\theta}}{\partial S\partial\varphi}+\frac{1}{S}\frac{\partial M_{S\theta}}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{S}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial M_\theta}{\partial S}-N_\theta\cot\gamma+\\&\frac{\partial}{\partial S}\left(SN_S\frac{\partial w}{\partial S}+N_{S\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(N_{S\theta}\frac{\partial w}{\partial S}+\frac{1}{S}N_\theta\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)-SK_w w+SK_p\Delta w=\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{4.43}$$

trong đó,

$$\Delta w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial w}{\partial S} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right), \rho_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)dz; \quad \rho(z) = V_{CNT}\rho_{CNT} + V_m\rho_m$$

Sử dụng hàm ứng suất Airy $F(s, \theta, t)$ định nghĩa như sau:

$$N_S = \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{S}\frac{\partial F}{\partial S},\ N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2},\ \ N_{S\theta} = -\frac{1}{S}\frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \varphi} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} \tag{4.44}$$

Sau một quá trình tính toán phương trình tương thích biến dạng (4.42) và phương trình chuyển động (4.43) sử dụng hàm ứng suất trong phương trình (4.44) với giả thiết Volmir ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \to 0$), nhận được hệ phương trình cho biến $F_1$ với $S = S_1 e^x$ và $F = F_1 e^{2x}$ như sau:

$$\begin{aligned} &H_{11}(F_1) + H_{12}(w) + H_{13}(F_1, w) = \rho_0 S_1^4 e^{4x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &H_{21}(F_1) + H_{22}(w) + H_{23}(w, w) = 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

trong đó, các hệ số $H_{ij}(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ được trình bày trong phụ lục A.2

Điều kiện biên của vỏ được giả sử là tựa đơn xác định như sau:

$$w = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = x_0 \tag{4.46}$$

Nghiệm của phương trình (4.45) thỏa mãn điều kiện biên được xác định như sau [100]:

$$\begin{aligned} &w = fe^x \sin(m_1 x)\sin(m_2\theta) + Gfe^x \sin^2(m_1 x) \\ &m_1 = \tfrac{m\pi}{x_0}, m_2 = \tfrac{n}{\sin\gamma}, x_0 = \ln\tfrac{S_2}{S_1} \end{aligned} \tag{4.47}$$

trong đó, hàm nghiệm độ võng $w$ gồm hai thành phần với hệ số $f$ là biên độ độ võng trong trường hợp tuyến tính, hệ số $G$ thể hiện mối quan hệ giữa thành phần tuyến tính và phi tuyến của độ võng.

Thay dạng nghiệm của độ võng ở phương trình (4.47) vào phương trình tương thích biến dạng (phương trình 2 của hệ phương trình (4.45)) và sử dụng phương pháp cân bằng điều hòa, nghiệm hàm ứng suất $F_1$ nhận được như sau:

$$
\begin{aligned}
&F_1 = K_1 f e^{-x} \sin(m_1 x) \sin(m_2 \varphi) + K_2 f e^{-x} \cos(m_1 x) \sin(m_2 \varphi) \\
&+K_3 G f e^{-x} \cos(2m_1 x) + K_4 G f e^{-x} \sin(2m_1 x) \\
&+\left(K_{51} G^2 f + K_{52} + K_{53} G\right) f \cos(2m_1 x) + \left(K_{61} G^2 f + K_{62} + K_{63} G\right) f \sin(2m_1 x) \\
&+K_7 f^2 \cos(2m_1 x) \cos(2m_2 \varphi) + K_8 f^2 \sin(2m_1 x) \cos(2m_2 \varphi) \\
&+\left(K_{91} G f^2 + K_{92} f\right) \cos(m_1 x) \sin(m_2 \varphi) + \left(K_{101} G f^2 + K_{102} f\right) \sin(m_1 x) \sin(m_2 \varphi) \\
&+K_{11} G f^2 \cos(3m_1 x) \sin(m_2 \varphi) + K_{12} G f^2 \sin(3m_1 x) \sin(m_2 \varphi) \\
&+K_{13} G^2 f^2 \cos(4m_1 x) + K_{14} G^2 f^2 \sin(4m_1 x) \\
&+K_{15} f^2 \cos(2m_2 \varphi) + K_{16} G f e^{-x} - \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{2x} \cos(m_2 \varphi)\right) T S_1^2
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

trong đó, các hệ số $K_i (i = 1, ..., 16)$ được trình bày ở phụ lục A.2

Áp dụng phương pháp Galerkin với các giới hạn tích phân của vỏ nón cụt được cho bởi công thức sau:

$$
\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin\gamma} \Phi e^x \sin(m_1 x) \sin(m_2 \varphi) d\varphi dx = 0 \tag{4.49}
$$

$$
\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin\gamma} \Phi e^x \sin^2(m_1 x) d\varphi dx = 0 \tag{4.50}
$$

Trong phương trình (4.49), $\Phi$ đại diện cho phương trình (4.45) sau khi đã thay các nghiệm trong phương trình (4.47) và (4.48), sau quá trình tính toán nhận được phương trình sau:

$$
u_1 f^3 G^2 + u_2 f^2 G + u_3 f^3 + u_4 T f + u_5 f = u_{13} \frac{d^2}{dt^2} f(t) \tag{4.51}
$$

$$
u_6 G^3 f^3 + u_7 f^2 G^2 + u_8 f^3 G + u_{10} f G + u_{11} f^2 + (u_9 f G + u_{12}) T = u_{14} \left(\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right) G \tag{4.52}
$$

trong đó, các hệ số $u_i (i = 1, ..., 14)$ được trình bày trong phụ lục A.2

Từ phương trình (4.51) xác định mối quan hệ giữa thành phần tuyến tính và phi tuyến của độ võng như sau:

$$\frac{u_5u_{12}}{u_4}+\frac{(u_3u_{12}-u_4u_{11})f^2}{u_4}+\frac{(u_1u_{12}+u_2u_9-u_4u_7)f^2G^2}{u_4}$$
$$+\frac{(u_1u_9-u_4u_6)f^3G^3}{u_4}+\left(\frac{(u_3u_9-u_4u_8)f^3}{u_4}+\frac{(u_2u_{12}-u_4u_{10}+u_5u_9)f}{u_4}\right)G=0 \tag{4.53}$$

Giả sử mối quan hệ $G=\lambda f$ và bỏ qua thành phần phi tuyến bậc cao, từ phương trình (4.53) nhận được:

$$\lambda=-\frac{u_3u_{12}-u_4u_{11}}{u_2u_{12}-u_4u_{10}+u_5u_9} \tag{4.54}$$

Phương trình nghiên cứu cho bài toán động của kết cấu vỏ nón được xác định như sau:

$$u_1f^4(t)\lambda^2+u_2f^2(t)\lambda+u_3f^2(t)+u_5f(t)+u_4Q_0\sin(\omega t)=u_{13}\frac{d^2}{dt^2}f(t) \tag{4.55}$$

Tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC nhận được từ phương trình (4.55) như sau:

$$\omega_L=\sqrt{-\frac{u_5}{u_{13}}} \tag{4.56}$$

### *4.2.2. Kết quả và thảo luận*

#### *4.2.2.1. Kết quả so sánh*

Phần này trình bày kết quả so sánh tần số riêng của vỏ nón cụt. Cụ thể, Bảng 4.15 so sánh tần số riêng không thứ nguyên của kết cấu vỏ nón cụt đồng chất các tài liệu [63]-[51] với các thông số vật liệu như sau: $\Omega=\omega_L\sqrt{\frac{\rho(1-v^2)}{E}}$, $\frac{R_2}{h}=100$, $\frac{L\sin\gamma}{R_2}=0.25$, $\nu=0.3, E=70GPa$, $\rho=2710\frac{Kg}{m^3}$.

Bảng 4.16 và Bảng 4.17 trình bày kết quả so sánh tần số riêng không thứ nguyên $\Omega=\omega_L\left(R_1^2/h\right)\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ của vỏ nón cụt FG-CNTRC với tài liệu [20] và tài liệu [19], tương ứng.

Các kết quả so sánh tần số riêng của vỏ nón cụt làm bằng vật liệu đồng nhất và vật liệu FG-CNTRC với các nghiên cứu sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn cho thấy lý thuyết thiết lập phương trình cơ bản và phương pháp Galerkin và hàm ứng suất Airy giải phương trình đạo hàm riêng của tọa độ và thời gian sử dụng trong luận án này là phù hợp và có thể sử dụng cho các phân tích ở các phần tiếp theo cho kết cấu vỏ nón cụt gia cường bởi các ống nano carbon có cơ tính biến thiên.

***Bảng 4.15:*** *So sánh tần số tự nhiên không thứ nguyên của vỏ nón cụt đồng nhất* $(m = 1)$

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tài liệu [63] | 0.8420 | 0.7376 | 0.6362 | 0.5528 | 0.4950 | 0.4661 |
| Tài liệu [65] | 0.8431 | 0.7416 | 0.6419 | 0.5590 | 0.5008 | 0.4701 |
| Tài liệu [51] | 0.7910 | 0.7284 | 0.6352 | 0.5531 | 0.4949 | 0.4653 |
| Luận án | 0.7894 | 0.7208 | 0.6552 | 0.5925 | 0.5328 | 0.4760 |

***Bảng 4.16:*** *So sánh tần số riêng không thứ nguyên* $\Omega = \omega_L \left(R_1^2/h\right) \sqrt{\rho_m/E_m}$ *của vỏ nón cụt FG-CNTRC* $\left(L/R_1 = 2, R_1/h = 20, \gamma = 30^o\right)$

| $V_{CNT}^*$ | Loại phân bố CNT | Tài liệu [20] | Luận án |
|---|---|---|---|
| 0.12 | UD | 6.00 | 5.66 |
| | FG-O | 5.29 | 4.82 |
| | FG-X | 6.61 | 6.41 |
| 0.17 | UD | 7.51 | 6.99 |
| | FG-O | 6.68 | 5.97 |
| | FG-X | 8.29 | 7.92 |
| 0.28 | UD | 8.52 | 8.02 |
| | FG-O | 7.40 | 6.54 |
| | FG-X | 9.66 | 9.38 |

***Bảng 4.17:*** *So sánh tần số riêng không thứ nguyên* $\Omega = \omega_L(R_1^2/h)\sqrt{\rho_m/E_m}$ *của vỏ nón cụt FG-CNTRC* ($h = 0.002m, R_1/h = 25, \gamma = 15°$)

| $V^*_{CNT}$ | Tài liệu | $L/R_1 = 1$ | | $L/R_1 = 3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | UD | FG-O | UD | FG-O |
| 0.12 | Tài liệu [19] | 4.03 | 3.58 | 1.81 | 1.69 |
| | Luận án | 4.0218 | 3.5233 | 1.8170 | 1.6978 |
| 0.17 | Tài liệu [19] | 5.08 | 4.51 | 2.30 | 2.15 |
| | Luận án | 5.0436 | 4.4620 | 2.3160 | 2.1515 |
| 0.28 | Tài liệu [19] | 5.67 | 5.12 | 2.52 | 2.38 |
| | Luận án | 5.6914 | 5.1946 | 2.5744 | 2.4030 |

*4.2.2.2. Kết quả tần số riêng*

Các thông số vật liệu CNT và vật liệu nền PMMA phụ thuộc vào nhiệt độ được trình bày trong Chương 2, mục 2.4.3. Các thông số hình học được sử dụng để khảo sát cho phân tích động của vỏ nón cụt FG-CNTRC trong mô trường nhiệt độ được lựa chọn như sau: $(m, n) = (1, 11)$, $h = 0.015m$, $L/R_1 = 2$, tải trọng động $T = 3000sin(500t)$.

Bảng 4.18 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT và các loại nền đàn hồi tới tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC. Có thể thấy rằng, tần số riêng của vỏ FG-X cao hơn tần số riêng của vỏ có ống nano carbon phân bố đều. Hơn nữa, sự có mặt của các ống nano carbon và nền đàn hồi làm cho kết cấu có tần số riêng lớn hơn. Tần số riêng của vỏ đặt trên nền đàn hồi Pasternak ($K_w = 2MPa/m$ , $K_p = 0.1MPa.m$) lớn hơn tần số riêng của vỏ đặt trên nền Winkler ($K_w = 1MPa/m$ , $K_p = 0$) và vỏ không đặt trên nền đàn hồi ($K_w = K_p = 0$). Tỉ lệ thể tích của CNT tăng lên trong kết cấu composite dẫn tới tần số riêng của vỏ tăng lên có thể được giải thích rằng, sự gia tăng CNT làm tăng độ cứng của tấm composite vì độ cứng của các ống CNT lớn hơn rất nhiều so với độ cứng của nền polymer bao xung quanh.

***Bảng 4.18:*** *Ảnh hưởng tỉ lệ CNT tới tần số riêng $\omega_L(rad/s)$ của vỏ nón cụt $\gamma = 30^o$, $L/R_1 = 2, \Delta T = 0$*

| $(K_w, K_p)$ | $V^*_{CNT} = 0.12$ | | $V^*_{CNT} = 0.28$ | |
|---|---|---|---|---|
| | UD | FG-X | UD | FG-X |
| (0,0) | 2205 | 2640 | 3267 | 3960 |
| (1,0) | 2752 | 3111 | 3646 | 4279 |
| (2,0.1) | 4534 | 4761 | 5085 | 5556 |

***Bảng 4.19:*** *Ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ lên tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC*

| $\gamma$ | UD | FG-X | FG-O |
|---|---|---|---|
| 15 | 5721 | 6769 | 4446 |
| 30 | 2205 | 2640 | 1664 |
| 45 | 1358 | 1635 | 1010 |
| 60 | 1039 | 1250 | 772 |

Bảng 4.19 trình bày ảnh hưởng của góc bán đỉnh tới tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC ($R_1/h = 80,\ L/R_1 = 2,\ V^*_{CNT} = 0.12, \Delta T = 0,\ (K_w\,,\ K_p) = (0,0)$). Khi tăng góc bán đỉnh trong cùng kiểu phân bố CNT thì tần số của vỏ nón cụt FG-CNTRC giảm đi. Cụ thể, khi tăng góc bán đỉnh từ $15^o \to 60^o$ nhận thấy giá trị của tần số riêng giảm dần. Trong trường hợp kiểu phân bố đều CNT với góc bán đỉnh $\gamma = 15^o$, tần số riêng $\omega_L = 5721\ \big(rad/s\big)$ khi tăng góc bán đỉnh $\gamma = 60^o$, tần số riêng giảm xuống $\omega_L = 1039\ \big(rad/s\big)$.

Bảng 4.20 và Bảng 4.21 thể hiện ảnh hưởng của tỉ số chiều dài trên bán kính $(L/R_1)$ và tỉ lệ chiều dài trên độ dày $(R_1/h)$ tới tần số riêng $\omega_L$ của vỏ nón cụt FG-CNTRC. Có thể thấy rằng, khi tỉ lệ ($L/R_1$, $R_1/h$) và hệ số gia nhiệt $\Delta T$ tăng lên thì tần số riêng của vỏ giảm đi. Có thể giải thích rằng khi cố định một giá trị trong tỉ số ($L/R_1$ hoặc $R_1/h$) và tăng giá trị kích thước còn lại sẽ làm cho vỏ

trở nên mỏng hơn dẫn tới khả năng chịu tải của vỏ kém đi.

***Bảng 4.20:*** *Ảnh hưởng tỉ lệ $L/R_1$ tới tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC $R_1/h = 80$, $\gamma = 30, \Delta T = 0, (K_w\,,\, K_p) = (0, 0)$*

| $V^*_{CNT}$ | $L/R_1$ | UD | FG-O |
|---|---|---|---|
| 0.12 | 1 | 3641 | 2624 |
| | 2 | 2205 | 1664 |
| | 3 | 1686 | 1318 |
| 0.17 | 1 | 4370 | 3133 |
| | 2 | 2667 | 2012 |
| | 3 | 2051 | 1606 |

***Bảng 4.21:*** *Ảnh hưởng hệ số gia nhiệt $\Delta T$ và tỉ lệ $R_1/h$ tới tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC ($UD, \gamma = 30^o$, $L/R_1 = 2, K_w = 0, K_p = 0$)*

| $\Delta T$ | $R_1/h$ | $V^*_{CNT} = 0.12$ | $V^*_{CNT} = 0.17$ | $V^*_{CNT} = 0.28$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 60 | 2580 | 3125 | 3816 |
| | 80 | 2205 | 2666 | 3267 |
| | 150 | 1481 | 1771 | 2222 |
| 300 | 60 | 2462 | 2976 | 3682 |
| | 80 | 2113 | 2551 | 3164 |
| | 150 | 1460 | 1749 | 2207 |
| 700 | 60 | 2236 | 2696 | 3402 |
| | 80 | 1935 | 2332 | 2944 |
| | 150 | 1405 | 1693 | 2141 |

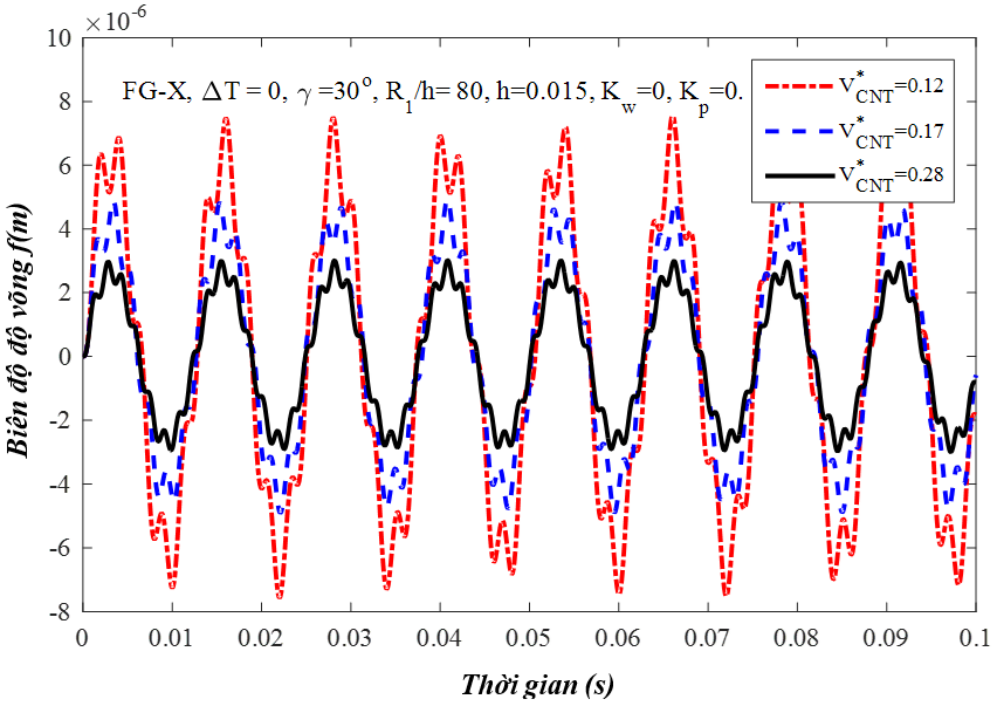
Có thể thấy rằng, trong các trường hợp khảo sát tần số riêng của vỏ nón cụt FG-CNTRC là lớn nhất cho loại FG-X và nhỏ nhất cho loại FG-O. Điều này có thể được giải thích là do sự phân bổ ứng suất cùng với sự phân bố CNT theo chiều dày của vỏ. Trong kiểu phân bố FG-X sự phân bố CNT là nhiều nhất ở

hai mặt ngoài và bằng không ở mặt giữa trong khi đó với mô hình FG-O thì ngược lại sự phân bố CNT nhiều nhất ở mặt giữa nhưng bằng không ở hai mặt ngoài. Sự phân bố của CNT trong mô hình FG-X trùng với sự phân bố ứng suất theo chiều dày kết cấu nên tận dụng được sự có mặt của CNT ở những vùng ứng suất tập trung.

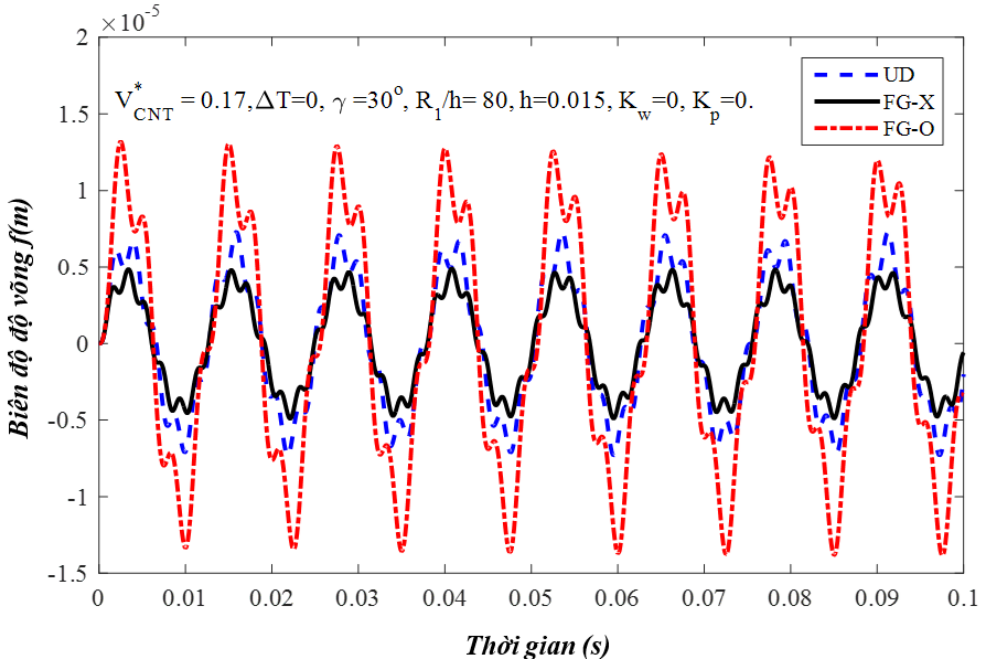
#### *4.2.2.3. Kết quả phân tích đáp ứng động lực học*

Hình 4.15 thể hiện sự ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT lên đường cong biên độ độ võng - thời gian của vỏ nón cụt. Ba trường hợp tỉ lệ thể tích CNT $V^*_{CNT}$ = (0.12, 0.17, 0.28) được khảo sát. Có thể nhận xét chung rằng, giá trị biên độ dao động của vỏ tăng lên khi tỉ lệ thể tích CNT giảm đi. Điều này được giải thích rằng các ống nano carbon có modul đàn hồi lớn hơn rất nhiều so với modul đàn hồi của vật liệu nền (polymer) nên khi tăng tỉ lệ CNT lên sẽ làm cho kết cấu trở nên cứng hơn dẫn đến khả năng chịu tải của kết cấu là tốt hơn. Cụ thể, xét cùng các tham số hình học và một giá trị thời gian, biên độ dao động của vỏ trong trường hợp $V^*_{CNT} = 0.12$ lớn hơn khoảng hơn 2 lần so với biên độ dao động của vỏ trong trường hợp $V^*_{CNT} = 0.28$ trong chu kỳ đầu tiên với giá trị thời gian khoảng $t = 0.004s$.

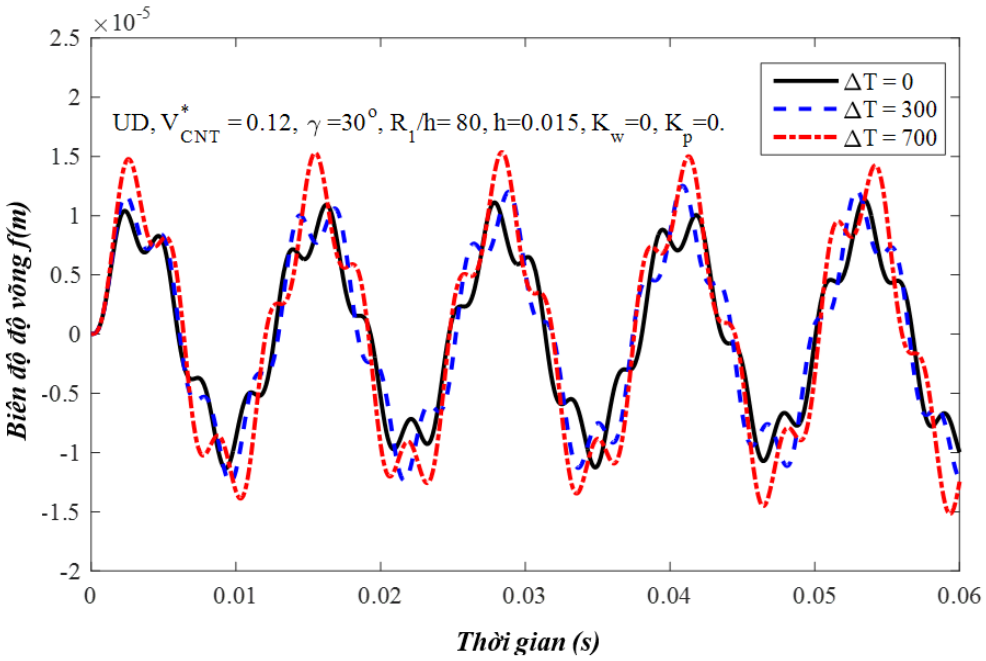
Hình 4.16 trình bày ảnh hưởng của các loại phân bố CNT lên đáp ứng động học của vỏ nón cụt với ba loại phân bố CNT: UD và FG-O, FG-X được khảo sát. Có thể thấy rằng, việc xác định các loại phân bố CNT để gia cố cho kết cấu là rất quan trọng vì sự phân bố của các ống nano carbon có ảnh hưởng rất lớn đến biên độ dao động của vỏ nón cụt. Biên độ dao động của vỏ nhỏ nhất với kiểu phân bố FG-X và lớn nhất với kiểu phân bố FG-O. Điều này cũng được giải thích tương tự là do sự phân bố của ống CNT và sự phân bố ứng suất theo chiều dày của vỏ như ở các phần trước.



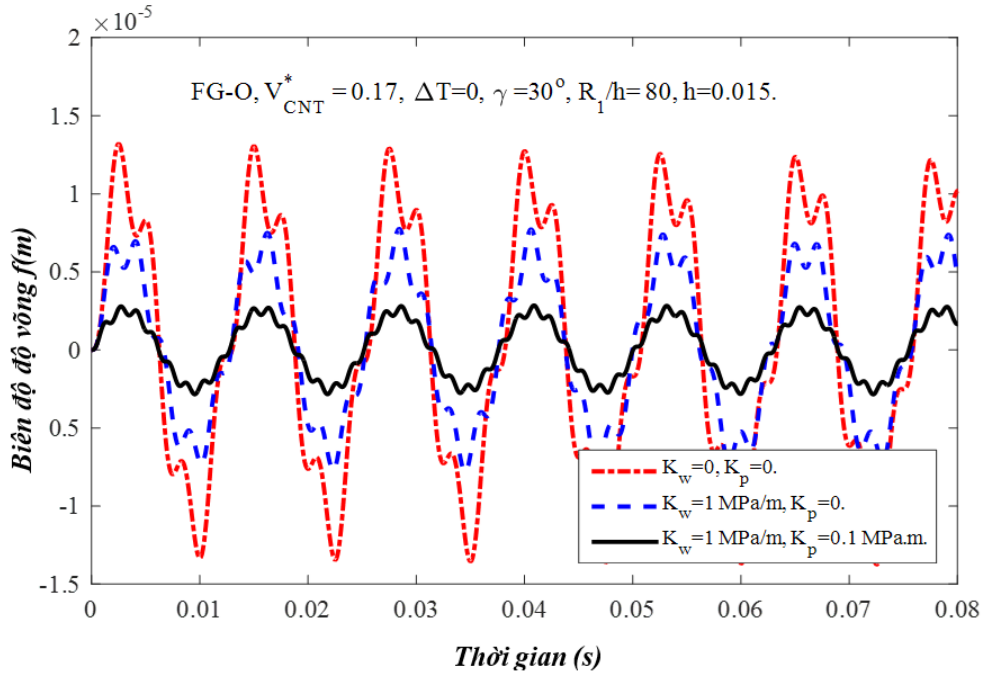

***Hình 4.15:*** *Ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích CNT tới đường cong biên độ độ võng và thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC*



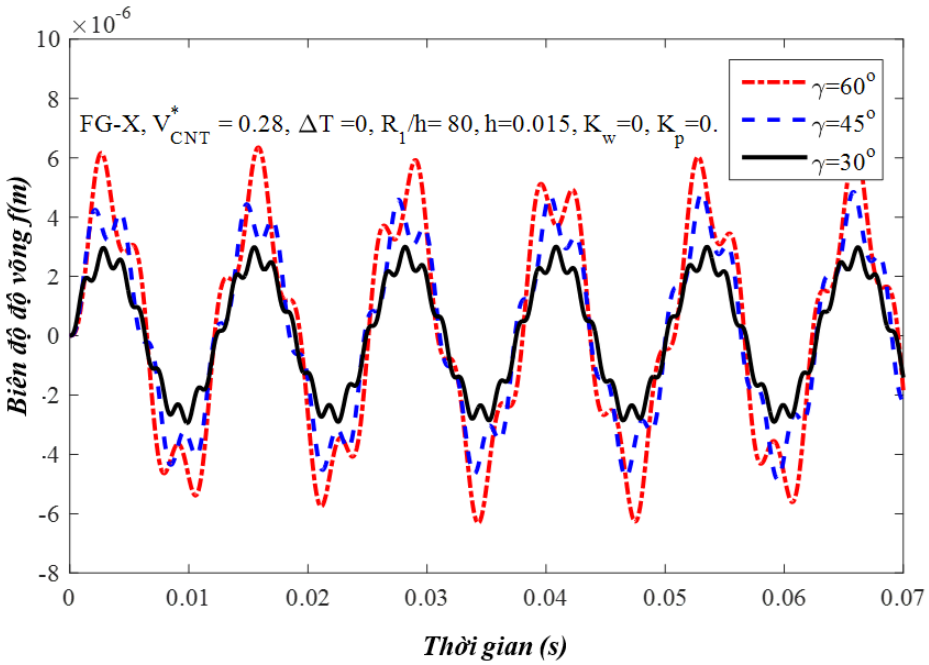

***Hình 4.16:*** *Ảnh hưởng của loại phân bố CNT tới đường cong biên độ độ võng và thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC*




***Hình 4.17:*** *Ảnh hưởng của hệ số gia nhiệt $\Delta T$ tới đường cong biên độ độ võng-thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC*




***Hình 4.18:*** *Ảnh hưởng của mô hình nền đàn hồi tới đường cong biên độ độ võng-thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC*




***Hình 4.19:*** *Ảnh hưởng của góc bán đỉnh $\gamma$ tới đường cong biên độ độ võng và thời gian của vỏ nón cụt FG-CNTRC*

Hình 4.17 trình bày ảnh hưởng của hệ số gia tăng nhiệt tới phản ứng động phi tuyến của vỏ nón cụt composite được gia cố bằng FG-CNT. Sự tăng nhiệt độ có ảnh hưởng tiêu cực đến đáp ứng động lực học của vỏ làm cho giá trị biên độ độ võng giảm đi. Điều này có thể giải thích rằng, khi nhiệt độ tăng lên đã làm giảm đi độ cứng module đàn hồi của vỏ dẫn tới khả năng chịu tải của vỏ giảm đi.

Hình 4.18 trình bày ảnh hưởng của nền đàn hồi lên đáp ứng động học phi tuyến của vỏ nón cụt FG-CNTRC. Ảnh hưởng của nền đàn hồi Winkler được xem xét với hệ số nền $K_w = 1MPa/m, K_p = 0$, ảnh hưởng của nền đàn hồi Pasternak với đặc trưng là hệ số nền $K_w = 1MPa/m, K_p = 0.1MPa.m$. Rõ ràng, nền đàn hồi có ảnh hưởng tích cực tới đáp ứng động học của vỏ nón cụt. Giá trị biên độ dao động của vỏ sẽ giảm đi đáng kể khi vỏ đặt trên nền đàn hồi đặc biệt là nền Pasternak.

Hình 4.19 biểu thị ảnh hưởng của góc bán đỉnh lên đáp ứng động học phi

tuyến của vỏ nón cụt FG-CNTRC. Ba trường hợp góc bán đỉnh được xem xét $\gamma = (30^o, 45^o, 60^o)$. Từ hình cho thấy, góc bán đỉnh có ảnh hưởng tới đáp ứng động học của vỏ nón cụt. Việc tăng giá trị của góc bán đỉnh làm cho giá trị biên độ dao động của vỏ tăng lên chứng tỏ rằng khả năng chịu tải của vỏ kém hơn khi góc bán đỉnh này tăng lên.

## 4.3. Kết luận chương 4

Kết quả phân tích đáp ứng động lực học và dao động của tấm và vỏ FG-CNTRC sử dụng nguyên lý Hamilton với lý thuyết biến dạng cắt hình sin và tính phi tuyến hình học của Von Kármán để thiết lập các phương trình chuyển động. Khảo sát ảnh hưởng các yếu tố hình học và vật liệu tới tần số riêng, mối liên hệ biên độ độ võng-thời gian, biên đô độ võng-tần số. Một số kết luận có thể rút ra như sau:

- Đề xuất lý thuyết biến dạng cắt hình sin mô tả mối liên hệ phi tuyến của ứng suất tiếp và biến dạng cắt. Xây dựng được phương trình chuyển động cho tấm và vỏ FG-CNTRC sử dụng lý thuyết biến dạng mới. Áp dụng cho phân tích động lực học của vỏ hai độ cong FG-CNTRC.

- Sử dụng phương pháp giải tích xác định được ba dạng nghiệm tương ứng cho ba trường hợp điều kiện biên của vỏ hai độ cong: Trường hợp tất cả các cạnh tựa đơn, trường hợp tất cả các cạnh ngàm và trường hợp hai cạnh tựa đơn, hai cạnh ngàm.

- Phương pháp Galerkin, hàm ứng suất và cân bằng điều hòa được áp dụng để xác định nghiệm của bài toán đạo hàm riêng chuyển động theo tọa độ. Sau đó, sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để giải phương trình vi phân theo thời gian.

- Tỉ lệ và vị trí phân bố của ống nano carbon trong kết cấu giúp tăng đáng

kể giá trị tần số dao động riêng, giảm biên độ dao động theo thời gian của các kết câu tấm và vỏ composite gia cường FG-CNTRC.

- Kết quả phân tích đáp ứng động lực học, dao động tự do và dao động cưỡng bức được khảo sát với các dạng hình học khác nhau như tấm, panel trụ, vỏ hai độ cong. Tần số cơ bản của vỏ hai độ cong cao hơn tấm và panel trụ. Kết quả này là do ảnh hưởng của bán kính cong làm cho độ cứng trong vỏ cao hơn, cho phép vỏ có thể phân bổ tải trọng đồng đều hơn trên bề mặt, so với tấm và panel trụ.

# KẾT LUẬN

**Những đóng góp của luận án:**

- Đề xuất lý thuyết biến dạng cắt hình sin nhằm giảm bớt khối lượng tính toán trong phân tích tấm và vỏ FG-CNTRC nhưng vẫn mô tả mối quan hệ phi tuyến giữa ứng suất tiếp và biến dạng cắt. Các phương trình cân bằng và chuyển động được xây dựng xuất phát từ lý thuyết này cũng như các lý thuyết biến dạng cắt của Reddy dựa trên nguyên lý công ảo và nguyên lý Hamilton với trường biến dạng phi tuyến von-Kármán.
- Xác định được ba dạng nghiệm của chuyển vị và hàm ứng suất tương ứng với điều kiện biên các cạnh tự đơn, ngàm và các cạnh tựa đơn và ngàm đối xứng cho phân tích tấm, vỏ FG-CNTRC sử dụng phương pháp giải tích.
- Phân tích mất ổn định của tấm, vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC nhằm xác định giá trị tải trọng tới hạn, mối liên hệ tải trọng-độ võng sau tới hạn sử dụng cả phương pháp giải tích và phương pháp mô phỏng số.
- Xây dựng mô hình phần tử hữu hạn 3D trong phần mềm ABAQUS với chương trình con USDFLD người dung định nghĩa để mô phỏng sự phân bố của CNT biến đổi chức năng theo chiều dày của tấm áp dụng phân tích mất ổn định của tấm FG-CNTRC.
- Xác định tần số riêng, mối liên hệ biên độ độ võng - thời gian, biên độ độ võng-tần số trong phân tích động lực học phi tuyến của tấm, vỏ hai độ cong và vỏ nón cụt FG-CNTRC sử dụng phương pháp giải tích và phương pháp số.

**Hướng phát triển của luận án:**

- Phân tích bài toán tĩnh và động của tấm, vỏ FG-CNTRC với các phương pháp khác nhau như Navier solution, biến đổi Fourier nhằm xác định dạng nghiệm đóng của phương trình.

- Tối ưu hóa thành phần vật liệu CNT nhằm nâng cao hiệu suất hoạt động cũng như giá trị tải trọng tới hạn, tần số riêng của các kết cấu FG-CNTRC.

- Sử dụng phương pháp thực nghiệm, giải tích, mô phỏng số kết hợp với phương pháp học máy (machine learning) áp dụng trong phân tích cơ học của các kết cấu FG-CNTRC.

- Xây dựng mô hình xác định tính chất vật liệu FG-CNT bằng phương pháp mô phỏng số RVE (Representative Volume Element) kết hợp mô hình mạng trí tuệ nhân tạo.

# DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[CT1] **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2024), "A semi-analytical sinusoidal shear deformation theory for nonlinear dynamic response and vibration of CNT–FGM doubly curved shallow shells", *Acta Mechanica*, DOI: https://doi.org/10.1007/s00707-023-03824-8.

[CT2] **Pham Dinh Nguyen**, George Papazafeiropoulos, Quang-Viet Vu, Nguyen Dinh Duc (2022), "Buckling response of laminated FG-CNT reinforced composite plates: analytical and finite element approach", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 121, 107368 (Elsevier, SCIE, IF=5.457).

[CT3] Nguyen Dinh Duc, Seung-Eock Kim, Duong Tuan Manh, **Pham Dinh Nguyen*** (2020), "Effect of eccentrically oblique stiffeners and temperature on the nonlinear static and dynamic response of S-FGM cylindrical panels", *Thin Walled Structures*, Vol. 146, pp. 106438 (Elsevier, SCIE, IF=4.442).

[CT4] **Pham Dinh Nguyen**, Vu Dinh Quang, Vu Thi Thuy Anh, Nguyen Dinh Duc (2019), "Nonlinear vibration of carbon nanotube reinforced composite truncated conical shells in thermal environment", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 19 (02), pp. 1950158 (World Scientific, SCIE, IF=2.15).

[CT5] **Pham Dinh Nguyen**, Do Thi Thu Ha, Duong Tuan Manh (2023), "Static buckling and free vibration analysis of aligned CNTs reinforced composite plates", *VNU - Journal of Science: Mathematics-Physics*, Vol. 39 (04). https://doi.org/10.25073/2588-1124/vnumap.4876.

[CT6] Nguyen Dinh Duc, Duong Tuan Manh, Nguyen Dinh Khoa, **Pham Dinh Nguyen** (2022), "Mechanical stability of sandwich eccentrically stiffened auxetic truncated conical shells surrounded on elastic foundations", *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 58, pp. 365–382 (Springer, SCIE, IF=1.52).

[CT7] Nguyễn Đình Đức, **Phạm Đình Nguyện*** (2021), "Tối ưu vị trí gân trong phân tích ổn định của tấm composite nhiều lớp", *Đã đăng tại tuyển tập hội nghị Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XV, 6-7/8/2021.*

[CT8] **Pham Dinh Nguyen**, George Papazafeiropoulos, Quang-Viet Vu, Nguyen Dinh Duc (2021), "Optimum buckling analysis of laminated composite plates reinforced by multiple stiffeners", *The 6th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2021).*

[CT9] Vu Thi Thuy Anh, Vu Thi Huong, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2021), "Nonlinear dynamic analysis of porous graphene platelet-reinforced composite sandwich shallow spherical shells", *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 57 (5), pp. 609-622 (Springer, SCIE, IF=1.52).

[CT10] **Pham Dinh Nguyen**, Quang-Viet Vu, George Papazafeiropoulos, Hoang Thi Thiem, Pham Minh Vuong, Nguyen Dinh Duc (2020), "Optimization of laminated composite plates for maximum biaxial buckling load", *VNU Journal of Science: Mathematics - Physics*, Vol. 121, DOI: 10.25073/2588-1124/vnumap.4509

[CT11] Duong Tuan Manh, Vu Thi Thuy Anh, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2020), "Nonlinear post-buckling of CNTs reinforced sandwich-structured composite annular spherical shells", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 20 (02), pp. 2050018.

[CT12] Do Quang Chan, **Pham Dinh Nguyen**, Vu Dinh Quang, Vu Thi Thuy Anh, Nguyen Dinh Duc (2019), "Nonlinear buckling and post-buckling of

functionally graded carbon nanotubes reinforced composite truncated conical shells subjected to axial load", *Steel and Composite Structures*, Vol. 31 (3), pp .243-259.

[CT13] Ngo Dinh Dat, Nguyen Dinh Khoa, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Dinh Duc (2019), "An analytical solution for nonlinear dynamic response and vibration of FG-CNT reinforced nanocomposite elliptical cylindrical shells resting on elastic foundations", *ZAMM - Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 100, DOI: 10.1002/zamm.201800238 (WILEY, SCIE, IF= 1.467).

[CT14] Nguyen Dinh Khoa, **Pham Dinh Nguyen** (2019), "Analytical investigation on nonlinear dynamic behavior and free vibration analysis of laminated nanocomposite plates", *Proc ImechE Part C J Mech Eng Sci*, Vol. 233, pp. 6866-6878.

[CT15] Nguyen Dinh Duc, **Pham Dinh Nguyen**, Nguyen Huy Cuong, Nguyen Van Sy, Nguyen Dinh Khoa (2018), "An analytical approach on nonlinear mechanical and thermal post-buckling of nanocomposite double-curved shallow shells reinforced by carbon nanotubes", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 233 (11), pp. 3888-3903. Doi: 10.1177/0954406218802921 (SAGE, SCIE, IF=1.015).

[CT16] **Pham Dinh Nguyen**, Quang-Viet Vu, George Papazafeiropoulos, Nguyen Dinh Duc (2024), "A comprehensive investigation on optimum layer thickness and fiber orientations of laminated composite plates against buckling failure under various loading conditions", *Revision*

# TÀI LIỆU THAM KHẢO

## Tiếng Việt:


[1] Phạm Thanh Hiếu (2022), *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống làm từ FGM và FG-CNTRC có kể đến tính đàn hồi của liên kết biên*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

[2] Vũ Thành Long (2022), *Ổn định của vỏ FGM có lỗ rỗng và panel sandwich FG-CNTRC với các cạnh biên chịu liên kết đàn hồi*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

[3] Dương Văn Quang (2023), *Phân tích tĩnh kết cấu vỏ trụ composite cơ tính biến thiên được gia cường bằng các ống nano carbon chịu tải trọng cơ và nhiệt độ*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

[4] Nguyễn Văn Thành (2022), *Ổn định và các đáp ứng phi tuyến của kết cấu tấm và vỏ composite gia cường các sợi nano các bon, có cơ lý tính biến đổi (FG-CNTRC)*, Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5] Vũ Văn Thẩm (2021), *Phân tích tĩnh và động tấm, vỏ thoải hai độ cong composite nano carbon - Áp điện*, Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Xây dựng, Hà Nội.

[6] Trần Ích Thịnh (2007), *Vật liệu composite: Cơ học và tính toán kết cấu*, Nhà xuất bản trẻ.

[7] Lê Thị Như Trang (2021), *Ổn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ thoải composite gia cường carbon nanotube*, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

[8] Trương Văn Tân (1994), *Vật liệu tiến tiến: Từ polymer dẫn điện đến ống than nano*, Nhà xuất bản Giáo Dục.

[9] Nguyễn Khoa Thịnh và Nguyễn Đình Đức (2002), *Vật liệu composite: Cơ học và Công nghệ*, Nhà xuất bản Khoa học Kĩ thuật, Hà Nội.

## Tiếng Anh:

[10] B. Adhikari and BN. Singh (2020), "Buckling characteristics of laminated functionally graded CNT reinforced composite plate under nonuniformuniaxial and biaxial in-plane edge loads", *Int J Struct Stab Dyn*, 20, p. 2050022.

[11] H. Ahmadi, A. Bayat, and ND. Duc (2021), "Nonlinear forced vibrations analysis of imperfect stiffened FG doubly curved shallow shell in thermal environment using multiple scales method", *Composite Structures*, 256, p. 113090.

[12] A. Alibeigloo (2016), "Elasticity solution of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel subjected to thermo mechanical load", *Composites Part B: Engineering*, 87, pp. 214–226, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.09.060.

[13] A. Alibeigloo and AAP. Zanoosi (2017), "Thermo-electro-elasticity solution of functionally graded carbon nanotube reinforced composite cylindrical shell embedded in piezoelectric layers", *Composite Structures*, 173, pp. 268–280, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.027.

[14] F. Alijani, M. Amabili, K. Karagiozis, and F. Bakhtiari-Nejad (2011), "Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells", *Journal of Sound and Vibration*, 330 (7), pp. 1432–1454.

[15] A. Alladi, M. Aluri, N. Maddela, and CR. Abbadi (2021), "Recent progress of CNTs reinforcement with metal matrix composites using friction stir processing", *Materials Today: Proceedings*, 44, pp. 1731–1738.

[16] H. Aminipour, M. Janghorban, and O. Civalek (2020), "Analysis of functionally graded doubly-curved shells with different materials via higher order shear deformation theory", *Composite Structures*, 251, p. 112645.

[17] MI. Ansari and A. Kumar (2019), "Bending analysis of functionally graded CNT reinforced doubly curved singly ruled truncated rhombic cone", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 47 (1), pp. 67–86, DOI: 10.1080/15397734.2018.1519635.

[18] R. Ansari, R. Hassani, R. Gholami, and H. Rouhi (2020), "Thermal postbuckling analysis of FG-CNTRC plates with various shapes and temperature-dependent properties using the VDQ-FEM technique", *Aerospace Science and Technology*, 106, p. 106078.

[19] R. Ansari and J. Torabi (2016), "Numerical study on the buckling and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells under axial loading", *Composites Part B: Engineering*, 95, pp. 196–208.

[20] R. Ansari, J. Torabi, and MF. Shojaei (2018), "Free vibration analysis of embedded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical/cylindrical shells and annular plates using a numerical approach", *Journal of Vibration and Control*, 24 (6), pp. 1123–1144, DOI: 10.1177/1077546316659172.

[21] BS. Aragh and H. Hedayati (2012), "Static response and free vibration of two-dimensional functionally graded metal/ceramic open cylindrical shells under various boundary conditions", *Acta Mechanica*, 223, 309–330.

[22] M. Arefi, EMR. Bidgoli, and O. Civalek (2022), "Bending response of FG composite doubly curved nanoshells with thickness stretching via higher-order sinusoidal shear theory", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50 (7), pp. 2350–2378.

[23] M. Arefi, EMR. Bidgoli, R. Dimitri, M. Bacciocchi, and F. Tornabene (2018), "Application of sinusoidal shear deformation theory and physical neutral surface to analysis of functionally graded piezoelectric plate", *Composites Part B: Engineering*, 151, pp. 35–50, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.05.050.

[24] K. Aristizabal, A. Katzensteiner, A. Bachmaier, F. Mücklich, and S. Suárez (2018), "On the reinforcement homogenization in CNT/metal matrix composites during severe plastic deformation", *Materials Characterization*, 136, pp. 375–381.

[25] SR. Bakshi, D. Lahiri, and A. Agarwal (2010), "Carbon nanotube reinforced metal matrix composites - a review", *International Materials Reviews*, 55, pp. 41–64, DOI: 10.1179/095066009X12572530170543.

[26] PS. Barada, D. Diptikanta, R. Prasanta, C. Shanta, R. Sudesna, and M. Kalyani (2023), "Improving reinforcement properties of CNTs in aluminum matrix composites: a case of surface modification through AlN nano-particle grafting", *Surfaces and Interfaces*, 36, p. 102571.

[27] NN. Beni (2019), "Free vibration analysis of annular sector sandwich plates with FG-CNT reinforced composite face-sheets based on the Carrera's Unified Formulation", *Composite Structures*, 214, pp. 269–

292, ISSN: 0263-8223, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.01.094.

[28] R. Bostanabad, B. Liang, J. Gao, WK. Liu, J. Cao, D. Zeng, X. Su, H. Xu, Y.Li, and W. Chen (2018), "Uncertainty quantification in multiscale simulation of woven fiber composites", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 338, pp. 506–532, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.024.

[29] SG. Chavan and A. Lal (2017), "Bending analysis of laminated SWCNT Reinforced functionally graded plate Using FEM", *Curved and Layered Structures*, 4 (1), pp. 134–145, DOI: doi:10.1515/cls-2017-0010.

[30] SM. Chorfi and A. Houmat (2010), "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form", *Composite Structures*, 92 (10), pp. 2573–2581.

[31] O. Civalek and MH. Jalaei (2020), "Shear buckling analysis of functionally graded (FG) carbon nanotube reinforced skew plates with different boundary conditions", *Aerospace Science and Technology*, 99, pp. 1–19, ISSN: 1270-9638.

[32] Pham Hong Cong, Vu Dinh Trung, Nguyen Dinh Khoa, and Nguyen Dinh Duc (2022), "Vibration and nonlinear dynamic response of temperature dependent FG-CNTRC laminated double curved shallow shell with positive and negative Poisson's ratio", *Thin-Walled Structures*, 171, p. 108713, ISSN: 0263-8231, DOI: https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108713.

[33] Ngo Dinh Dat, Nguyen Van Thanh, Vu Minh Anh, and Nguyen Dinh Duc (2022), "Vibration and nonlinear dynamic analysis of sandwich FG-CNTRC plate with porous core layer", *J Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 29, pp. 1431–1448.

[34] S. Daviran, S. Mohasseb, A. Kasaeian, and O. Mahian (2017), "Differential quadrature method for thermal shock analysis of CNT reinforced metal-ceramic functionally graded disc", *Composite Structures*, 161, pp. 299–307.

[35] CF. Deng, D.Z. Wang, X.X. Zhang, and Y.X. Ma (2007), "Damping characteristics of carbon nanotube reinforced aluminum composite", *Materials Letters*, 61 (14), pp. 3229–3231.

[36] B. Di, Hu Q, Shen Z, Zhang W, and Wang C (2020), "Low velocity impact analysis of high-order rectangular FG-CNTRC plates using the weak form QEM", *IOP Conference*, 758, p. 012097.

[37] Nguyen Dinh Duc, Homayoun Hadavinia, Tran Quoc Quan, and Nguyen Dinh Khoa (2019), "Free vibration and nonlinear dynamic response of imperfect nanocomposite FG-CNTRC double curved shallow shells in thermal environment", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 75, pp. 355–366, ISSN: 0997-7538, DOI: https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.024.

[38] Nguyen Dinh Duc and Pham Dinh Nguyen (2017), "The Dynamic Response and Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite (FG-CNTRC) Truncated Conical Shells Resting on Elastic Foundations", *Materials*, 10 (10).

[39] Nguyen Dinh Duc and Pham Minh Phuc (2021), "Free vibration analysis of cracked FG CNTRC plates using phase field theory", *Aerospace Science and Technology*, 112, p. 106654.

[40] Nguyen Dinh Duc, Quoc Quan Tran, and Dinh Khoa Nguyen (2017), "New approach to investigate nonlinear dynamic response and vibration of imperfect functionally graded carbon nanotube reinforced composite double curved shallow shells subjected to blast load and temper-

ature", *Aerospace Science and Technology*, 71, pp. 360–372, ISSN: 1270-9638, DOI: https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.09.031.

[41] M. Farid, P. Zahedinejad, and P. Malekzadeh (), "Three-dimensional temperature dependent free vibration analysis of functionally graded material curved panels resting on two-parameter elastic foundation using a hybrid semi-analytic, differential quadrature method", *Materials and Design*, 31, pp. 2–13, ISSN: 0261-3069, DOI: https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.07.025.

[42] DB. Fernanda and Daniel Ambrosini (2013), "Dynamic response of composites sandwich plates with carbon nanotubes subjected to blast loading", *Composites Part B: Engineering*, 45 (1), pp. 466–473.

[43] K. Foroutan, H. Ahmadi, and E. Carrera (2019), "Nonlinear vibration of imperfect FG-CNTRC cylindrical panels under external pressure in the thermal environment", *Composite Structures*, 227, p. 111310, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111310.

[44] A. Frikha, S. Zghal, and F. Dammak (2018), "Dynamic analysis of functionally graded carbon nanotubes-reinforced plate and shell structures using a double directors finite shell element", *Aerospace Science and Technology*, 78, pp. 438–451, ISSN: 1270-9638, DOI: https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.04.048.

[45] A. Frikha, S. Zghal, and F. Dammak (2018), "Finite rotation three and four nodes shell elements for functionally graded carbon nanotubes-reinforced thin composite shells analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 329, pp. 289–311, ISSN: 0045-7825, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.10.013.

[46] A. Hajlaoui, E. Chebbi, and F. Dammak (2019), "Buckling analysis of carbon nanotube reinforced FG shells using an efficient solid-shell element based on a modified FSDT", *Thin-Walled Structures*, 144,

p. 106254, ISSN: 0263-8231, DOI: https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106254.

[47] CJ. Halpin (2017), *Primer on Composite Materials Analysis*, 2nd, Ebook edition, Routledge, New York, p. 240.

[48] JC. Halpin (1969), "Stiffness and Expansion Estimates for Oriented Short Fiber Composites", *Journal of Composite Materials*, 3 (4), pp. 732–734, DOI: 10.1177/002199836900300419.

[49] Q. He, YL. Zhou, Ming Li, Lin He, and Hong-Liang Dai (2023), "Nonlinear vibration analysis of CFRR sandwich doubly-curved shallow shells with a porous microcapsule coating in hygrothermal environment", *Thin-Walled Structures*, 185, p. 110587.

[50] S. Iijima (1991), "Helical microtubules of graphitic carbon", *Nature*, 354 (6348), pp. 56–58.

[51] T. Irie, G. Yamada, and K. Tanaka (1984), "Natural frequencies of truncated conical shells", *Journal of Sound and Vibration*, 92 (3), pp. 447–453.

[52] P. Jiao, Z. Chen, H. Ma, D. Zhang, and P. Ge (2019), "Buckling analysis of thin rectangular FG-CNTRC plate subjected to arbitrarily distributed partial edge compression loads based on differential quadrature method", *Thin-Walled Structures*, 145, p. 106417, ISSN: 0263-8231, DOI: https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106417.

[53] MM. Keleshteri, M. Asadi, and MM. Aghdam (2019), "Nonlinear bending analysis of FG-CNTRC annular plates with variable thickness on elastic foundation", *Thin Walled Structures*, 135, pp. 453–462.

[54] Nguyen Dinh Khoa and Pham Dinh Nguyen (2019), "nalytical investigation on nonlinear dynamic behavior and free vibration analysis of laminated nanocomposite plates", *Proceedings of the Institution of*

*Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 233, 6866–6878.

[55] Y. Kiani (2016), "Shear buckling of FG-CNT reinforced composite plates using Chebyshev-Ritz method", *Composites Part B: Engineering*, 105, pp. 176–187.

[56] Y. Kiani (2017), "Dynamics of FG-CNT reinforced composite cylindrical panel subjected to moving load", *Thin-Walled Structures*, 111, pp. 48–57, ISSN: 0263-8231, DOI: https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.11.011.

[57] Y. Kiani (2017), "Free vibration of FG-CNT reinforced composite spherical shell panels using Gram-Schmidt shape functions", *Composite Structures*, 159, pp. 368–381, ISSN: 0263-8223, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.09.079.

[58] Y. Kiani (2017), "Buckling of FG-CNT reinforced composite plates subjected to parabolic loading", *Acta Mech*, 228, pp. 1303–1319.

[59] Y. Kiani, R. Dimitri, and F. Tornabene (2018), "Free vibration study of composite conical panels reinforced with FG-CNTs", *Engineering Structures*, 172, pp. 472–482, ISSN: 0141-0296, DOI: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.006.

[60] Y. Kiani and M. Mirzaei (2018), "Rectangular and skew shear buckling of FG-CNT reinforced composite skew plates using Ritz method", *Aerospace Science and Technology*, 77, pp. 388–398.

[61] M. Koizumi (1997), "FGM activities in Japan", *Composites Part B: Engineering*, 28 (1), Use of Composites Multi-Phased and Functionally Graded Materials, pp. 1–4, ISSN: 1359-8368.

[62] P. Kumar and J. Srinivas (2017), "Vibration, buckling and bending behavior of functionally graded multi-walled carbon nanotube reinforced

polymer composite plates using the layer-wise formulation", *Composite Structures*, 177, pp. 158–170.

[63] KY Lam and Li Hua (1999), "Influence of boundary conditions on the frequency characteristics of a rotating truncated circular conical shell", *Journal of Sound and Vibration*, 223 (2), pp. 171–195.

[64] SY. Lee and JG. Hwang (2019), "Finite element nonlinear transient modeling of carbon nanotubes reinforced fiber/polymer composite spherical shells with a cutout", *Nanotechnology Reviews*, 8 (1), pp. 444–451, DOI: 10.1515/ntrev-2019-0039.

[65] FM. Li, K. Kishimoto, and WH. Huang (2009), "The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh–Ritz method", *Mechanics Research Communications*, 36 (5), pp. 595–602.

[66] H. Li, YX. Hao, W. Zhang, SW. Yang, and YT. Cao (2023), "Vibration analysis of the porous metal cylindrical curved panel by using the differential quadrature method", *Thin-Walled Structures*, 186, p. 110694.

[67] KM. Liew and A. Alibeigloo (2021), "Predicting bucking and vibration behaviors of functionally graded carbon nanotube reinforced composite cylindrical panels with three-dimensional flexibilities", *Composite Structures*, 256, p. 113039, ISSN: 0263-8223, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113039.

[68] P. Malekzadeh, M. Dehbozorgi, and SM. Monajjemzadeh (2015), "Vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates under a moving load", *Science and Engineering of Composite Materials*, 22 (1), pp. 37–55, DOI: doi:10.1515/secm-2013-0142.

[69] H. Matsunaga (2008), "Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, 84, pp. 132–146.

[70] M. Sorrenti MD. Sciuva (2019), "Bending, free vibration and buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced sandwich plates, using the extended Refined Zigzag Theory", *Composite Structures*, 227, p. 111324.

[71] K. Mehar and SK. Panda (2017), "Numerical investigation of nonlinear thermomechanical deflection of functionally graded CNT reinforced doubly curved composite shell panel under different mechanical loads", *Composite Structures*, 161, pp. 287–298.

[72] K. Mehar and SK. Panda (2018), "Thermoelastic flexural analysis of FG-CNT doubly curved shell panel", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 90 (1), pp. 11–13, DOI: https://doi.org/10.1108/AEAT-11-2015-0237.

[73] K. Mehar, SK. Panda, Y. Devarajan, and G. Choubey (2019), "Numerical buckling analysis of graded CNT-reinforced composite sandwich shell structure under thermal loading", *Composite Structures*, 216, pp. 406–414, ISSN: 0263-8223, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.002.

[74] M. Mehri, H. Asadi, and Q. Wang (2016), "Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 303, pp. 75–100, ISSN: 0045-7825, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.01.017.

[75] X. Miao, C. Li, and Y. Jiang (2021), "Free vibration analysis of metal-ceramic matrix composite laminated cylindrical shell reinforced by CNTs", *Composite Structures*, 260, p. 113262.

[76] Rasool Moradi-Dastjerdi and Hamed Momeni-Khabisi (2018), "Vibrational behavior of sandwich plates with functionally graded wavy carbon nanotube-reinforced face sheets resting on Pasternak elastic foundation", *Journal of Vibration and Control*, 24 (11), pp. 2327–2343, DOI: 10.1177/1077546316686227.

[77] S. Natarajan, M. Haboussi, and G. Manickam (2014), "Application of higherorder structural theory to bending and free vibration analysis of sandwich plates with CNT reinforced composite facesheets", *Composite Structures*, 113, 197–207.

[78] TK. Nguyen, HT. Thai, and PV. Thuc (2021), "A novel general higher-order shear deformation theory for static, vibration and thermal buckling analysis of the functionally graded plates", *Journal of Thermal Stresses*, 44, pp. 377–394.

[79] TN. Nguyen, CH. Thai, Anh-Tuan Luu, H. Nguyen-Xuan, and Jaehong Lee (2019), "NURBS-based postbuckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shells", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 347, pp. 983–1003, ISSN: 0045-7825, DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.01.011.

[80] Snehanshu Pal, Pokula Narendra Babu, B.S.K. Gargeya, and Charlotte S. Becquart (2020), "Molecular Dynamics simulation-based investigation of possible enhancement in strength and ductility of nanocrystalline aluminum by CNT reinforcement", *Materials Chemistry and Physics*, 243, p. 122593.

[81] P. Phungvan, M. Abdel-Wahab, KM. Liew, SPA. Bordas, and H. Nguyen-Xuan (2015), "Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, 123, pp. 137–149.

[82] S. Pouresmaeel and SA. Fazelzadeh (2016), "Frequency analysis of doubly curved functionally graded carbon nanotube-reinforced composite panelsl environment", *Thin-Walled Structures*, 227, 2765–2794.

[83] Z. Qin, X. Pang, B. Safaei, and F. Chu (2019), "Free vibration analysis of rotating functionally graded CNT reinforced composite cylindrical shells with arbitrary boundary conditions", *Composite Structures*, 220, pp. 847–860, ISSN: 0263-8223, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.046.

[84] Tran Quoc Quan, Phuong Tran, Ngo Duc Tuan, and Nguyen Dinh Duc (2015), "Nonlinear dynamic analysis and vibration of shear deformable eccentrically stiffened S-FGM cylindrical panels with metal-ceramic-metal layers resting on elastic foundations", *Composite Structures*, 126, pp. 16–33, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.056.

[85] M. Ramezani, RP. Mohammad, and F. Tornabene (2022), "Nonlinear thermomechanical analysis of CNTRC cylindrical shells using HSDT enriched by zig-zag and polyconvex strain cover functions", *Thin-Walled Structures*, 172, p. 108918, DOI: https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.108918.

[86] JN. Reddy (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J. Appl. Mech*, 51, pp. 745–752.

[87] JN. Reddy (2006), *Theory and analysis of elastic plates and shells*, 2nd, CRC Press, p. 568.

[88] JN. Reddy (2007), *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC Press.

[89] JN. Reddy and CD. Chin (1998), "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", *Journal of Thermal Stresses*, 21 (6), pp. 593–626, DOI: 10.1080/01495739808956165.

[90] R. Rostami and M. Mohammadimehr (2021), "Dynamic stability and bifurcation analysis of sandwich plate with considering FG core and FG-CNTRC face sheets", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 23 (6), pp. 2296–2325, DOI: 10.1177/1099636220909766.

[91] B. Safaei, R. Moradi-Dastjerdi, K. Behdinan, and F. Chu (2019), "Critical buckling temperature and force in porous sandwich plates with CNT-reinforced nanocomposite layers", *Aerospace Science and Technology*, 91, pp. 175–185, DOI: https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.05.020.

[92] HS. Shen (2009), "Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments", *Composite Structures*, 91 (1), pp. 9–19, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.026.

[93] HS. Shen, Xiuhua Chen, Licheng Guo, Linzhi Wu, and Xiao-Lin Huang (2015), "Nonlinear vibration of FGM doubly curved panels resting on elastic foundations in thermal environments", *Aerospace Science and Technology*, 47, pp. 434–446.

[94] HS. Shen, XH. Huang, and J. Yang (2020), "Nonlinear bending of temperature-dependent FG-CNTRC laminated plates with negative Poisson's ratio", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27 (13), pp. 1141–1153.

[95] HS. Shen and H. Wang (2014), "Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments", *Composites Part B: Engineering*, 60, pp. 167–177, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.12.051.

[96] HS. Shen and ZL. Zhang (2010), "Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates", *Mater Des.*, 31, 3403–3411.

[97] HS. Shen and ZH. Zhu (2010), "Buckling and Postbuckling Behavior of Functionally Graded Nanotube-Reinforced Composite Plates in Thermal Environments", *Computers, Materials and Continua*, 18 (2), pp. 155–182.

[98] DL. Shi, XQ. Feng, YY. Huang, KC. Hwang, and H. Gao (2004), "The Effect of Nanotube Waviness and Agglomeration on the Elastic Property of Carbon Nanotube-Reinforced Composites ", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126 (3), pp. 250–257.

[99] M. Sobhy (2019), "Levy solution for bending response of FG carbon nanotube reinforced plates under uniform, linear, sinusoidal and exponential distributed loadings", *Eng. Struct.*, 182, pp. 198–212.

[100] AH. Sofiyev and N. Kuruoglu (2013), "Non-linear buckling of an FGM truncated conical shell surrounded by an elastic medium", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 107, pp. 38–49.

[101] ZG. Song, LW. Zhang, and KM. Liew (2016), "Vibration analysis of CNT reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments", *Int J Mech Sci*, 174, 339–347.

[102] A. Soni, N. Grover, G. Bhardwaj, and B.N. Singh (2020), "Non-polynomial framework for static analysis of functionally graded carbon nano-tube reinforced plates", *Composite Structures*, 233, pp. 13–20.

[103] V. Tahouneh (2017), "Using modified Halpin-Tsai approach for vibrational analysis of thick functionally graded multi-walled carbon nanotube plates", *Steel and Composite Structures*, 23 (6), pp. 657–668.

[104] Vahid Tahouneh (2020), "Vibrational analysis of sandwich sectorial plates with functionally graded sheets reinforced by aggregated carbon nanotube", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 22 (5), pp. 1496–1541, DOI: 10.1177/1099636218785972.

[105] CH. Thai, TD. Tran, and P. Phung-Van (2020), "A size-dependent moving Kriging meshfree model for deformation and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates", *Eng Anal Bound Elem*, 115, 52–63.

[106] HT. Thai and PV. Thuc (2013), "A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates", *Applied Mathematical Modelling*, 37 (5), pp. 3269–3281.

[107] VV. Tham, HQ. Tran, and TM. Tu (2021), "Vibration characteristics of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly-curved shells", *Applied Mathematics and Mechanics*, 42, pp. 819–840.

[108] Pham Toan Thang, T. Nguyen Thoi, and Jaehong Lee (2019), "Closed-form solution for nonlinear buckling analysis of FG-CNTRC cylindrical shells with initial geometric imperfections", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 73, pp. 483–491.

[109] Nguyen Van Thanh, Nguyen Dinh Khoa, Ngo Duc Tuan, Phuong Tran, and Nguyen Dinh Duc (2017), "Nonlinear dynamic response and vibration of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite (FG-CNTRC) shear deformable plates with temperature dependence material properties and surrounded on elastic foundations", *J. Thermal Stresses*, 40, pp. 1254–1274.

[110] J. Torabi, R. Ansari, and R. Hassani (2019), "Numerical study on the thermal buckling analysis of CNT-reinforced composite plates with different shapes based on the higher-order shear deformation theory", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 73, pp. 144–160.

[111] HQ. Tran, VV. Tham, and TM. Tu (2021), "Active vibration control of a piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced spherical shell panel", *Acta Mechanica*, 232, pp. 1005–1023.

[112] B. Uymaz and M. Aydogdu (2007), "Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26, pp. 1847–1863.

[113] T. Von Kármán (1910), *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*, Encyklopädie der mathematischen wissenschaften, Teubner, URL: https://books.google.com.vn/books?id=5-FKHwAACAAJ.

[114] HN. Vu, TKM. Do, MD. Vu, TH. Vu, TH. Pham, and TP. Nguyen (2020), "A new analytical approach for nonlinear global buckling of spiral corrugated FG-CNTRC cylindrical shells subjected to radial loads", *Applied Sciences*, 10, p. 2600.

[115] HN. Vu, TKM. Do, MD. Vu, TH. Vu, TH. Pham, and TP. Nguyen (2023), "A new analytical approach for nonlinear buckling and postbuckling of torsion-loaded FG-CNTRC sandwich toroidal shell segments with corrugated core in thermal environments", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, DOI: https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2249458.

[116] GJ. Wang, YP. Cai, YJ. Ma, SC. Tang, JA. Syed, ZH. Cao, and XK. Meng (2019), "Ultrastrong and Stiff Carbon Nanotube/Aluminum–Copper Nanocomposite via Enhancing Friction between Carbon Nanotubes", *Nano Letters*, 19 (9), pp. 6255–6262, DOI: 10.1021/acs.nanolett.9b02332.

[117] M. Wang, ZM. Li, and P. Qiao (2016), "Semi-analytical solutions to buckling and free vibration analysis of carbon nanotube-reinforced composite thin plates", *Composite Structures*, 144, 33–43.

[118] Q. Wang, B. Qin, D. Shi, and Q. Liang (2017), "A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doubly-curved panels and shells of revolution", *Composite Structures*, 174, pp. 87–109, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.04.038.

[119] Xiaoshu Wang, Xiaozhen Wang, Kan Liu, He Cao, Yishi Su, Di Zhang, and Qiubao Ouyang (2023), "Effect of the CNTs into SiCp-Al interfacial micro-zones on aging precipitation behavior, microstructure and mechanical properties of SiCp(CNT)/Al–Zn–Mg–Cu composites", *Composites Part B: Engineering*, 259, p. 110708.

[120] S. Zghal, A. Frikha, and F. Dammak (2017), "Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced plate and shell structures", *Composite Structures*, 176, pp. 1107–1123, ISSN: 0263-8223, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.015.

[121] LW. Zhang, WC. Cui, and KM. Liew (2015), "Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite thick plates with elastically restrained edges", *International Journal of Mechanical Sciences*, 103, pp. 9–21, ISSN: 0020-7403, DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.08.021.

[122] LW. Zhang, ZX. Lei, and KM. Liew (2015), "Computation of vibration solution for functionally graded carbon nanotube-reinforced composite thick plates resting on elastic foundations using the element-free IMLS-Ritz method", *Applied Mathematics and Computation*, 256, pp. 488–504, ISSN: 0096-3003, DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.01.066.

[123] LW. Zhang, ZX. Lei, KM. Liew, and JL. Yu (2014), "Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels", *Composite Structures*, 111, pp. 205–212.

[124] LW. Zhang, ZX. Lei, KM. Liew, and JL. Yu (2014), "Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels", *Composite Structures*, 111, pp. 205–212, ISSN: 0263-8223, DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.035.

[125] LW. Zhang and BA. Selim (2017), "Vibration analysis of CNT-reinforced thick laminated composite plates based on Reddy's higher-order shear deformation theory", *Composite Structures*, 160, pp. 689–705.

[126] LW. Zhang, Z. Song, and KM. Liew (2015), "Nonlinear bending analysis of FG-CNT reinforced composite thick plates resting on Pasternak foundations using the element-free IMLS-Ritz method", *Compos. Struct.*, 128, pp. 165–175.

[127] LW. Zhang, ZG. Song, and KM. Liew (2015), "State-space Levy method for vibration analysis of FG-CNT composite plates subjected to in-plane loads based on higher-order shear deformation theory", *Composite Structures*, 134, pp. 989–1003.

[128] X. Zhang, W. Li, J. Ma, Y.Li, Y. Deng, M. Yang, Y. Zhou, X. Zhang, and P. Dong (2020), "Temperature dependent strengthening mechanisms and yield strength for CNT/metal composites", *Composite Structures*, 244, p. 112246.

[129] R. Zhong, Q. Wang, J. Tang, C. Shuai, and Q. Liang (2018), "Vibration characteristics of functionally graded carbon nanotube reinforced composite rectangular plates on Pasternak foundation with arbitrary boundary conditions and internal line supports", *Curv Layer Struct*, 5, 1–34.

# PHỤ LỤC

## A.1.

$A_{11}^* = \frac{A_{11}}{\Delta}, A_{22}^* = \frac{A_{22}}{\Delta}, A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\Delta},\ A_{66}^* = \frac{1}{A_{11}},\ B_{66}^* = \frac{B_{66}}{A_{11}},\ \Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2,$
$B_{11}^* = A_{22}^*B_{11} - A_{12}^*B_{12},\ B_{22}^* = A_{11}^*B_{22} - A_{12}^*B_{12},\ B_{12}^* = A_{22}^*B_{12} - A_{12}^*B_{22},\ B_{21}^* =$
$A_{11}^*B_{12} - A_{12}^*B_{11},\ D_{11}^* = \frac{A_{12}^*D_{11} - A_{11}^*D_{12}}{\Delta},\ D_{12}^* = \frac{A_{12}^*D_{12} - A_{11}^*D_{22}}{\Delta},\ D_{21}^* = \frac{A_{12}^*D_{12} - A_{22}^*D_{11}}{\Delta},$
$D_{22}^* = \frac{A_{22}^*D_{12} - A_{12}^*D_{22}}{\Delta},\ D_{66}^* = \frac{D_{66}}{A_{66}}$

$$G_{11}(w) = f_{10}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + f_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + f_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - f_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$G_{12}(\phi_x) = f_4\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + f_5\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + f_6\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2}, G_{13}\left(\phi_y\right) = f_7\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + f_8\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + f_9\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y}$$

$$G_{14}(f) = f_1\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + f_2\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + f_3\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

$$S(w, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$G_{21}(w) = m_6\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + m_7\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + m_9\frac{\partial w_0}{\partial x}, G_{22}(\phi_x) = m_3\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + m_4\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + m_8\phi_x$$

$$G_{23}\left(\phi_y\right) = m_5\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}, G_{24}(f) = m_1\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + m_2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2},$$

$$G_{31}(w) = l_6\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + l_7\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + l_9\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$G_{32}(\phi_x) = l_3\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y}, G_{33}\left(\phi_y\right) = l_4\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + l_5\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + l_8\phi_y,\ G_{34}(f) = l_1\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + l_2\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

$$f_1 = \left(c_1D_{11}A_{22}^* - c_1D_{12}A_{12}^* + c_1D_{22}A_{11}^* - c_1D_{12}A_{21}^* - 2c_1D_{66}A_{66}^*\right)$$

$$f_2 = \left(c_1D_{12}A_{11}^* - c_1D_{11}A_{21}^*\right)$$

$$f_3 = \left(c_1D_{12}A_{22}^* - c_1D_{22}A_{12}^*\right), f_4 = (-3c_1C_{44} + 3c_1c_2E_{44} + A_{44} - c_2C_{44})$$

$$f_5 = \left(c_1D_{12}B_{11}^* - c_1D_{11}B_{21}^* + c_1E_{11} - c_1^2D_{12}D_{11}^* + c_1^2D_{11}D_{21}^* - c_1^2G_{11}\right)$$

$$f_6 = \begin{pmatrix} -2c_1^2G_{66} + 2c_1^2D_{66}D_{66}^* + c_1D_{22}B_{11}^* - c_1D_{12}B_{21}^* + c_1E_{12} \\ -c_1^2D_{22}D_{11}^* + c_1^2D_{12}D_{21}^* - c_1^2G_{12} + 2c_1E_{66} - 2c_1D_{66}B_{66}^* \end{pmatrix}$$

$$f_7 = (-3c_1C_{55} + 3c_1c_2E_{55} + A_{55} - c_2C_{55})$$

$$f_8 = \left(c_1 D_{22} B_{12}^* - c_1 D_{12} B_{22}^* + c_1 E_{22} - c_1^2 D_{22} D_{12}^* + c_1^2 D_{12} D_{22}^* - c_1^2 G_{22}\right)$$

$$f_9 = \begin{pmatrix} c_1 D_{12} B_{12}^* - c_1 D_{11} B_{22}^* + c_1 E_{12} - c_1^2 D_{12} D_{12}^* + c_1^2 D_{11} D_{22}^* - c_1^2 G_{12} \\ +2c_1 E_{66} - 2c_1 D_{66} B_{66}^* - 2c_1^2 G_{66} + 2c_1^2 D_{66} D_{66}^* \end{pmatrix}$$

$$f_{10} = \begin{pmatrix} -c_1^2 D_{12} D_{12}^* + c_1^2 D_{11} D_{22}^* - c_1^2 G_{12} - 4c_1^2 G_{66} + 4c_1^2 D_{66} D_{66}^* - c_1^2 D_{22} D_{11}^* \\ -c_1^2 G_{12} + c_1^2 D_{12} D_{21}^* \end{pmatrix}$$

$$f_{11} = \begin{pmatrix} -c_1^2 D_{12} D_{11}^* + c_1^2 D_{11} D_{21}^* - c_1^2 G_{11} \end{pmatrix},$$

$$f_{12} = \left(-c_1^2 D_{22} D_{12}^* + c_1^2 D_{12} D_{22}^* - c_1^2 G_{22}\right)$$

$$f_{13} = \begin{pmatrix} A_{44} - c_2 C_{44} - 3c_1 C_{44} + 3c_1 c_2 E_{44} \end{pmatrix},$$

$$f_{14} = \begin{pmatrix} A_{55} - c_2 C_{55} - 3c_1 C_{55} + 3c_1 c_2 E_{55} \end{pmatrix}$$

$$m_1 = \begin{pmatrix} B_{12} A_{11}^* - B_{11} A_{21}^* - c_1 D_{12} A_{11}^* + c_1 D_{11} A_{21}^* \end{pmatrix},$$

$$m_2 = \begin{pmatrix} B_{11} A_{22}^* - B_{12} A_{12}^* - B_{66} A_{66}^* - c_1 D_{11} A_{22}^* + c_1 D_{12} A_{12}^* + c_1 D_{66} A_{66}^* \end{pmatrix},$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} B_{12} B_{11}^* - B_{11} B_{21}^* + C_{11} - c_1 D_{12} B_{11}^* + c_1 D_{11} B_{21}^* - c_1 E_{11} \\ -c_1 B_{12} D_{11}^* + c_1 B_{11} D_{21}^* - c_1 E_{11} + c_1^2 D_{12} D_{11}^* - c_1^2 D_{11} D_{21}^* + c_1^2 G_{11} \end{pmatrix},$$

$$m_4 = \begin{pmatrix} c_1(B_{66} D_{66}^* - E_{66}) + c_1^2 G_{66} - c_1^2 D_{66} D_{66}^* + C_{66} - B_{66} B_{66}^* - c_1 E_{66} \\ +c_1 D_{66} B_{66}^* \end{pmatrix}$$

$$m_5 = \begin{pmatrix} C_{66} - B_{66} B_{66}^* - c_1 E_{66} + c_1 D_{66} B_{66}^* - c_1 E_{66} + c_1 B_{66} D_{66}^* + c_1^2 G_{66} \\ -c_1^2 D_{66} D_{66}^* + B_{12} B_{12}^* - B_{11} B_{22}^* + C_{12} - c_1 D_{12} B_{12}^* + c_1 D_{11} B_{22}^* - c_1 E_{12} \\ -c_1 B_{12} D_{12}^* + c_1 B_{11} D_{22}^* - c_1 E_{12} + c_1^2 D_{12} D_{12}^* - c_1^2 D_{11} D_{22}^* + c_1^2 G_{12} \end{pmatrix}$$

$$m_6 = \begin{pmatrix} -2c_1 E_{66} + 2c_1 B_{66} D_{66}^* + 2c_1^2 G_{66} - 2c_1^2 D_{66} D_{66}^* - c_1 B_{12} D_{12}^* + c_1 B_{11} D_{22}^* \\ -c_1 E_{12} + c_1^2 D_{12} D_{12}^* - c_1^2 D_{11} D_{22}^* + c_1^2 G_{12} \end{pmatrix}$$

$$m_7 = \left(-c_1 B_{12} D_{11}^* + c_1 B_{11} D_{21}^* - c_1 E_{11} + c_1^2 D_{12} D_{11}^* - c_1^2 D_{11} D_{21}^* + c_1^2 G_{11}\right)$$

$$m_8 = \left(c_2 C_{44} - A_{44} - 3c_1 c_2 E_{44} + 3c_1 C_{44}\right), m_9 = \left(c_2 C_{44} - A_{44} - 3c_1 c_2 E_{44} + 3c_1 C_{44}\right)$$

$$l_1 = \left(B_{22}A_{11}^* - B_{12}A_{21}^* - B_{66}A_{66}^* - c_1D_{22}A_{11}^* + c_1D_{12}A_{21}^* + c_1D_{66}A_{66}^*\right),$$

$$l_2 = \left(B_{12}A_{22}^* - B_{22}A_{12}^* - c_1D_{12}A_{22}^* + c_1D_{22}A_{12}^*\right),$$

$$l_3 = \begin{pmatrix} C_{66} - B_{66}B_{66}^* + c_1(D_{66}B_{66}^* - E_{66} - D_{22}B_{11}^*) + B_{22}B_{11}^* - B_{12}B_{21}^* + C_{12} \\ +c_1D_{12}B_{21}^* - c_1E_{12} - c_1B_{22}D_{11}^* + c_1B_{12}D_{21}^* - c_1E_{12} + c_1^2D_{22}D_{11}^* \\ -c_1^2D_{12}D_{21}^* + c_1^2G_{12} - c_1E_{66} + c_1B_{66}D_{66}^* + c_1^2G_{66} - c_1^2D_{66}D_{66}^* \end{pmatrix}$$

$$K_1^1 = \left(f_1\frac{F_{33}}{F_D} + f_{10}\right)\alpha^2\beta^2 + \left(f_2\frac{F_{33}}{F_D} + f_{11}\right)\alpha^4 + \left(f_3\frac{F_{33}}{F_D} + f_{12}\right)\beta^4 - f_{13}\alpha^2 - f_{14}\beta^2$$

$$K_1^2 = \frac{8}{3}\frac{\alpha^2\beta^2}{n\pi^2 m}\left(4\frac{F_{33}}{F_D} - \left(\frac{f_2}{A_{11}^*} + \frac{f_3}{A_{22}^*}\right)\right), K_1^3 = -\left(\frac{\alpha^4}{16A_{22}^*} + \frac{\beta^4}{16A_{11}^*}\right)$$

$$K_1^4 = \left(f_1\frac{F_{31}}{F_D}\alpha^2\beta^2 + f_2\frac{F_{31}}{F_D}\alpha^4 + f_3\frac{F_{31}}{F_D}\beta^4 - f_4\alpha + f_5\alpha^3 + f_6\alpha\beta^2\right)$$

$$K_1^5 = \left(f_1\frac{F_{32}}{F_D}\alpha^2\beta^2 + f_2\frac{F_{32}}{F_D}\alpha^4 + f_3\frac{F_{32}}{F_D}\beta^4 - f_7\beta + f_8\beta^3 + f_9\beta\alpha^2\right)$$

$$K_1^6 = \frac{32}{3}\frac{\alpha^2\beta^2}{n\pi^2 m}\frac{F_{31}}{F_D}, K_1^7 = \frac{32}{3}\frac{\alpha^2\beta^2}{n\pi^2 m}\frac{F_{32}}{F_D}$$

$$K_2^1 = -\left(m_7\alpha^3 + m_6\alpha\beta^2 + m_1\frac{F_{33}}{F_D}\alpha^3 + m_2\frac{F_{33}}{F_D}\alpha\beta^2 - m_9\alpha\right), K_2^2 = \frac{8\beta m_1}{3A_{11}^* ab}$$

$$K_2^3 = -\left(m_1\frac{F_{31}}{F_D}\alpha^3 + m_2\frac{F_{31}}{F_D}\alpha\beta^2 + m_3\alpha^2 + m_4\beta^2 - m_8\right)$$

$$K_2^4 = -\left(m_5\alpha\beta + m_1\frac{F_{32}}{F_D}\alpha^3 + m_2\frac{F_{32}}{F_D}\alpha\beta^2\right)$$

$$K_3^1 = -\left(l_6\alpha^2\beta + l_7\beta^3 + l_1\frac{F_{33}}{F_D}\alpha^2\beta + l_2\frac{F_{33}}{F_D}\beta^3 - l_9\beta\right), K_3^2 = \frac{8\alpha l_2}{3A_{22}^* ab}$$

$$K_3^3 = -\left(\alpha\beta l_3 + l_1\frac{F_{31}}{F_D}\alpha^2\beta + l_2\frac{F_{31}}{F_D}\beta^3\right)$$

$$K_3^4 = -\left(l_4\alpha^2 + l_5\beta^2 - l_8 + l_1\frac{F_{32}}{F_D}\alpha^2\beta + l_2\frac{F_{32}}{F_D}\beta^3\right)$$

$$K_1^8 = \begin{cases} -\frac{1}{4}\alpha^2 ab, \text{tải nén đều} \\ -3\frac{m^2\pi^2}{ab}, \text{tải nén parabol} \end{cases}$$

$$o_1 = K_1^1 + \frac{K_1^4\left(-K_2^1K_3^4 + K_2^4K_3^1\right)}{K_2^3K_3^4 - K_2^4K_3^3} - \frac{K_1^5\left(-K_2^1K_3^3 + K_2^3K_3^1\right)}{K_2^3K_3^4 - K_2^4K_3^3}$$

$$o_2 = \frac{\begin{pmatrix} K_1^2K_2^1K_3^4 - K_1^2K_2^4K_3^3 - K_1^4K_2^2K_3^4 + K_1^4K_2^4K_3^2 + K_1^5K_2^2K_3^3 \\ -K_1^5K_2^3K_3^2 - K_1^6K_2^1K_3^4 + K_1^6K_2^4K_3^1 + K_1^7K_2^1K_3^3 - K_1^7K_2^3K_3^1 \end{pmatrix}}{K_2^3K_3^4 - K_2^4K_3^3}$$

$$o_3 = K_1^3 - \frac{\left(K_1^6K_2^2K_3^4 - K_1^6K_2^4K_3^2 - K_1^7K_2^2K_3^3 + K_1^7K_2^3K_3^2\right)}{K_2^3K_3^4 - K_2^4K_3^3}, o_4 = K_1^8$$

## A.2.

$$H_{11}(F_1) = c_{12}e^{2x}\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4} + (c_{11} + 4c_{12} - c_{22})\, e^{2x}\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} +$$
$$\left(5c_{12} + 3(c_{11} - c_{22}) - c_{21}\right) e^{2x}\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}$$
$$+ \left(2c_{12} + 2(c_{11} - c_{22}) - 2c_{21}\right) e^{2x}\frac{\partial F_1}{\partial x} + (c_{11} + c_{22} - 2c_{31})\, e^{2x}\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2\partial\varphi^2}$$
$$+ (c_{11} + 3c_{22} - 4c_{31})\, e^{2x}\frac{\partial^3 F_1}{\partial x\partial\varphi^2} + (2c_{22} - 2c_{31} + 2c_{21})\, e^{2x}\frac{\partial^2 F_1}{\partial\varphi^2}$$
$$+c_{21}e^{2x}\frac{\partial^4 F_1}{\partial\varphi^4} - S_1e^{3x}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1\right)\cot\gamma$$
$$H_{12}(w) = c_{13}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (-4c_{13} - c_{23} + c_{14})\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(5c_{13} + 3(c_{23} - c_{14}) - c_{24}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$+ \left(-2c_{13} + 2(c_{14} - c_{23}) + 2c_{24}\right)\frac{\partial w}{\partial x} - (3c_{14} + 4c_{32} + c_{23})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial\varphi^2} +$$
$$(c_{14} + 2c_{32} + c_{23})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\varphi^2} + (2c_{14} - 2c_{32} + 2c_{24})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) + c_{24}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}\right)$$
$$-S_1^4e^{4x}K_w w + S_1^2e^{2x}K_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) - \rho_0 S_1^4e^{4x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$H_{13}(F_1, w) = e^{2x}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)$$
$$+e^{2x}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2e^{2x}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial\varphi} + \frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\varphi}\right)$$
$$H_{21}(F_1) = A_{11}^*e^{2x}\frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4} + 4A_{11}^*e^{2x}\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} + \left(5A_{11}^* - A_{22}^*\right)e^{2x}\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + +A_{22}^*e^{2x}\frac{\partial^4 F_1}{\partial\varphi^4}$$
$$+ \left(2A_{66}^* - 4A_{12}^*\right)e^{2x}\frac{\partial^3 F_1}{\partial x\partial\varphi^2} + \left(2A_{22}^* - 2A_{12}^* + A_{66}^*\right)e^{2x}\frac{\partial^2 F_1}{\partial\varphi^2} + \left(2A_{11}^* - 2A_{22}^*\right)e^{2x}\frac{\partial F_1}{\partial x}$$
$$H_{23}(w, w) = -\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2 + 2\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\varphi} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\varphi}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$H_{22}(w) = c_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (c_{22} - c_{11} - 4c_{12})\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (5c_{12} - 3c_{22} + 3c_{11} - c_{21})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$
$$+ (-2c_{12} + 2c_{22} - 2c_{11} + 2c_{21})\frac{\partial w}{\partial x} + (-3c_{22} + 4c_{31} - c_{11})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial\varphi^2}$$
$$+ (c_{11} + c_{22} - 2c_{31})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\varphi^2}$$
$$+ (2c_{22} + 2c_{21} - 2c_{31})\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + c_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4} + S_1e^x\cot\gamma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$K_1 = -\frac{a_{24}}{a_{23}}, \quad K_2 = -\frac{a_{25}}{a_{23}}, \quad K_3 = \frac{a_{13}}{a_{12}}, \quad K_4 = \frac{a_{14}}{a_{12}},$$
$$K_{51} = -\frac{1}{2}\frac{m_1(2a_{15}m_1 + a_{16})}{a_{15}^2 + a_{16}^2}, \quad K_{52} = -\frac{a_{15}a_{17} + a_{16}a_{18}}{a_{15}^2 + a_{16}^2},$$
$$K_{53} = -\frac{\cot(\gamma)S_1 m_1(2a_{15}m_1 + a_{16})}{a_{15}^2 + a_{16}^2}, \quad K_{61} = -\frac{1}{2}\frac{m_1(-2a_{16}m_1 + a_{15})}{a_{15}^2 + a_{16}^2},$$
$$K_{62} = -\frac{a_{15}a_{18} - a_{16}a_{17}}{a_{15}^2 + a_{16}^2}, \quad K_{63} = -\frac{\cot(\gamma)S_1 m_1(-2a_{16}m_1 + a_{15})}{a_{15}^2 + a_{16}^2},$$
$$K_7 = \frac{1}{4}\frac{a_1 m_1^2 - 4a_2 a_3}{a_1^2 + a_2^2}, \quad K_8 = \frac{1}{2}\frac{a_2 m_1^2 + 4a_1 a_3}{a_1^2 + a_2^2},$$
$$K_{91} = -\frac{a_{19}a_{21} + a_{20}a_{22}}{a_{19}^2 + a_{20}^2}, \quad K_{92} = \frac{1}{2}\frac{\cot(\gamma)S_1 m_1(a_{19}m_1 - a_{20})}{a_{19}^2 + a_{20}^2},$$
$$K_{101} = \frac{a_{19}a_{22} - a_{20}a_{21}}{a_{19}^2 + a_{20}^2}, \quad K_{102} = \frac{1}{2}\frac{\cot(\gamma)S_1 m_1(a_{20}m_1 + a_{19})}{a_{19}^2 + a_{20}^2},$$
$$K_{11} = -\frac{a_8 a_{10} - a_9 a_{11}}{a_8^2 + a_9^2}, \quad K_{12} = -\frac{a_8 a_{11} + a_9 a_{10}}{a_8^2 + a_9^2},$$
$$K_{13} = \frac{a_4 m_1^2 + a_5 a_6}{a_4^2 + a_5^2}, K_{14} = \frac{a_5 m_1^2 - a_4 a_6}{a_4^2 + a_5^2}, K_{15} = \frac{m_1^2 m_2^2}{2a_7}, K_{16} = -\frac{c_{12} + c_{21}}{2A_{22}^*}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 8A_{11}^* {m_1}^4 - 16{m_2}^2 A_{_{12}}^* {m_1}^2 + 8A_{22}^* {m_2}^4 + 8{m_2}^2 A_{_{66}}^* {m_1}^2 - 10A_{11}^* {m_1}^2 \\ +4A_{12}^* {m_2}^2 + 2A_{22}^* {m_1}^2 - 4A_{22}^* {m_2}^2 - 2A_{_{66}}^* {m_2}^2 \end{pmatrix}$$
$$a_2 = \left(-16A_{11}^* {m_1}^3 + 16A_{_{12}}^* m_1 {m_2}^2 - 8A_{_{66}}^* m_1 {m_2}^2 + 2A_{_{11}}^* m_1 - 2A_{22}^* m_1\right)$$
$$a_3 = \left(\tfrac{1}{8}m_1 - \tfrac{1}{8}{m_1}^3 - \tfrac{1}{8}m_1 {m_2}^2\right), a_4 = \left(256A_{11}^* {m_1}^4 - 80A_{11}^* {m_1}^2 + 16A_{22}^* {m_1}^2\right)$$
$$a_5 = \left(-256A_{11}^* {m_1}^3 + 8A_{11}^* m_1 - 8A_{22}^* m_1\right), a_6 = \left({m_1}^3 - \tfrac{1}{4}m_1\right)$$
$$a_7 = \left(16A_{22}^* {m_2}^4 + 8A_{12}^* {m_2}^2 - 8A_{22}^* {m_2}^2 - 4A_{66}^* {m_2}^2\right)$$
$$a_8 = \left(-54A_{11}^* {m_1}^3 + 6A_{12}^* m_1 {m_2}^2 - 3A_{66}^* m_1 {m_2}^2 + 3A_{11}^* m_1 - 3A_{22}^* m_1\right)$$
$$a_9 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2A_{22}^* {m_2}^2 - 2A_{12}^* {m_2}^2 + 45A_{11}^* {m_1}^2 - 9A_{22}^* {m_1}^2 - 81A_{11}^* {m_1}^4 \\ -A_{22}^* {m_2}^4 + A_{66}^* {m_2}^2 + 18{m_2}^2 A_{12}^* {m_1}^2 - 9{m_2}^2 A_{66}^* {m_1}^2 \end{pmatrix}$$
$$a_{10} = \left(-\tfrac{9}{8}{m_1}^2 + \tfrac{1}{2}{m_1}^2 {m_2}^2\right), a_{11} = \left(\tfrac{3}{4}{m_1}^3 - \tfrac{3}{8}m_1 + \tfrac{1}{4}m_1 {m_2}^2\right),$$
$$a_{12} = \left(16A_{11}^* {m_1}^4 + 4A_{11}^* {m_1}^2 + 4A_{22}^* {m_1}^2 + A_{22}^*\right)$$
$$a_{13} = m_1\left(16c_{12}{m_1}^2 - 4c_{11}{m_1}^2 - 16c_{12}{m_1}^2 + 4c_{22}{m_1}^2 - 4c_{12} - c_{11} + 3c_{12} + c_{22}\right),$$
$$a_{14} = \left(8c_{12}{m_1}^4 - 12c_{12}{m_1}^2 + 14c_{12}{m_1}^2 + 2c_{21}{m_1}^2 + \tfrac{1}{2}c_{12} + \tfrac{1}{2}c_{21}\right),$$
$$a_{15} = \left(16A_{11}^* {m_1}^4 - 20A_{11}^* {m_1}^2 + 4A_{22}^* {m_1}^2\right),$$
$$a_{16} = \left(32A_{11}^* {m_1}^3 - 4A_{11}^* m_1 + 4A_{22}^* m_1\right)$$

$$a_{17} = \left(\tfrac{1}{2}{m_1}^2 - \tfrac{1}{2}{m_1}^2{m_2}^2\right), a_{18} = \left(-\tfrac{1}{4}m_1{m_2}^2 + \tfrac{1}{4}m_1 - \tfrac{1}{4}{m_1}^3\right)$$

$$a_{19} = \left(2A^*_{11}{m_1}^3 - 2A^*_{12}m_1{m_2}^2 + A^*_{66}m_1{m_2}^2 - A^*_{11}m_1 + A^*_{22}m_1\right)$$

$$a_{20} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2A^*_{22}{m_2}^2 - 5A^*_{11}{m_1}^2 + A^*_{11}{m_1}^4 + 2A^*_{12}{m_2}^2 + A_{s22}{m_2}^4 \\ +A^*_{22}{m_1}^2 - A^*_{66}{m_2}^2 - 2{m_2}^2A^*_{12}{m_1}^2 + {m_2}^2A^*_{66}{m_1}^2 \end{pmatrix}$$

$$a_{21} = \left(\tfrac{1}{2}{m_1}^2{m_2}^2 - \tfrac{3}{8}{m_1}^2\right), a_{22} = \left(\tfrac{3}{8}m_1 - \tfrac{1}{4}m_1{m_2}^2 + \tfrac{1}{4}{m_1}^3\right),$$

$$a_{23} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} A^*_{22} + A^*_{22}{m_2}^4 + A^*_{11}{m_1}^2 + A^*_{22}{m_1}^2 + A^*_{11}{m_1}^4 \\ -2{m_2}^2A^*_{22} + {m_2}^2A^*_{66}{m_1}^2 - 2{m_2}^2A^*_{12}{m_1}^2 \end{pmatrix}$$

$$a_{24} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} c_{12}{m_1}^4 - 2{m_2}^2c_{21} + 7c_{12}{m_1}^2 - 6c_{12}{m_1}^2 + c_{21}{m_2}^4 + 8{m_2}^2c_{31} \\ +c_{11}{m_1}^2{m_2}^2 + c_{22}{m_1}^2{m_2}^2 - 2c_{31}{m_1}^2{m_2}^2 + c_{21}{m_1}^2 + c_{21} + c_{12} \end{pmatrix}$$

$$a_{25} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} c_{22}m_1{m_2}^2 + 8c_{31}m_1{m_2}^2 - c_{11}m_1{m_2}^2 + c_{11}{m_1}^3 - c_{22}m_1 \\ -3c_{12}m_1 + 4c_{12}{m_1}^3 + c_{11}m_1 - 4c_{12}{m_1}^3 + 4c_{12}m_1 - c_{22}{m_1}^3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{u^*_1\begin{pmatrix} -16b_7{x_0}^5 - 16b_6{x_0}^5 - 16b_5{x_0}^5 + 6\pi^4b_5m^4x_0 \\ +18\pi^4b_6m^4x_0 + 5\pi^3b_1m^3{x_0}^2 + 54\pi^3b_2m^3{x_0}^2 \\ +26\pi^3b_3m^3{x_0}^2 - 5\pi^3b_4m^3{x_0}^2 - 28\pi^2b_6m^2{x_0}^3 \\ -52\pi^2b_7m^2{x_0}^3 + 20\pi b_1m{x_0}^4 + 24\pi b_2m{x_0}^4 \\ +8\pi b_3m{x_0}^4 - 20\pi b_4m{x_0}^4 + 18\pi^5b_3m^5 \\ +20\pi^2b_5m^2{x_0}^3 - 36\pi^4b_7m^4x_0 \end{pmatrix}}{8(9\pi^2m^2+4{x_0}^2)(\pi^2m^2+{x_0}^2)(\pi^2m^2+4{x_0}^2)}$$

$$u^*_1 = \pi^2m\sin(\gamma)\left(-1 + \mathrm{e}^{4x_0}\right)$$

$$u_2 = \frac{\pi^2m\sin(\gamma)\left(-1+\mathrm{e}^{4x_0}\right)}{4(\pi^2m^2+{x_0}^2)(\pi^2m^2+4{x_0}^2)}\begin{pmatrix} \pi^3b_{34}m^3 - 2\pi^2m^2b_{38}x_0 \\ +\pi^2m^2b_{36}x_0 + 3\pi mb_{32}{x_0}^2 \\ +\pi mb_{34}{x_0}^2 - 2b_{38}{x_0}^3 - 2b_{36}{x_0}^3 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{2\pi^2m\sin(\gamma)\left(-1+\mathrm{e}^{3x_0}\right)}{3(4\pi^2m^2+9{x_0}^2)(16\pi^2m^2+9{x_0}^2)}\begin{pmatrix} 32b_{33}m^3\pi^3 - 48\pi^2m^2b_{37}x_0 \\ +24\pi^2m^2b_{35}x_0 + 18\pi mb_{33}{x_0}^2 \\ +54\pi mb_{31}{x_0}^2 - 27b_{37}{x_0}^3 - 27b_{35}{x_0}^3 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{\pi^2 m\left(-1+\mathrm{e}^{4\,x_0}\right)\sin(\gamma)}{4(\pi^2m^2+{x_0}^2)(\pi^2m^2+4\,{x_0}^2)} \left( \begin{array}{l} \pi^2m^2b_{45}x_0 + \pi\,mb_{42}{x_0}^2 \\ +3\,\pi\,mb_{41}{x_0}^2 - 2b_{46}{x_0}^3 \\ -2\pi^2m^2b_{46}x_0 - 2b_{45}{x_0}^3 + \pi^3m^3b_{42} \end{array} \right)$$

$$u_4 = \frac{m^2\pi^3{S_1}^2 \left( \begin{array}{l} -7\pi^2m^2 + 4\mathrm{e}^{6\,x_0}\pi^2m^2 + 3\pi^2\mathrm{e}^{4\,x_0}m^2 \\ +16\mathrm{e}^{6\,x_0}{x_0}^2 + 9\mathrm{e}^{4\,x_0}{x_0}^2 - 25{x_0}^2 \end{array} \right)\sin(\gamma)}{24(\pi^2m^2+4\,{x_0}^2){x_0}^2} + \frac{3n^2m^2\pi^3{S_1}^2 \left( \begin{array}{l} 16\mathrm{e}^{6\,x_0}{x_0}^2 + 9\mathrm{e}^{4\,x_0}{x_0}^2 - 25{x_0}^2 \\ -5\pi^2m^2 + 4\mathrm{e}^{6\,x_0}\pi^2m^2 + \pi^2\mathrm{e}^{4\,x_0}m^2 \end{array} \right)}{24\sin(\gamma)(\pi^2m^2+4\,{x_0}^2)(9\,{x_0}^2+\pi^2m^2)}$$

$$u_5 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(\pi\,b_{60}m-b_{63}x_0)\mathrm{e}^{2\,x_0}}{2(\pi^2m^2+{x_0}^2)} + \frac{2(2\,\pi\,b_{61}m-3\,b_{64}x_0)\mathrm{e}^{3\,x_0}}{3(9\,{x_0}^2+4\,\pi^2m^2)} \\ +\frac{(\pi\,b_{62}m-2\,b_{65}x_0)\mathrm{e}^{4\,x_0}}{4(\pi^2m^2+4\,{x_0}^2)} + \frac{{S_1}^4m\pi\left(1-\mathrm{e}^{6\,x_0}\right)K_w}{12(9\,{x_0}^2+\pi^2m^2)} \end{array} \right\} m\pi^2\sin(\gamma)$$

$$u_6 = \frac{\pi^5m^4\left(-1+\mathrm{e}^{4\,x_0}\right)\sin(\gamma) \left( \begin{array}{l} 36\,K_{14}m^5\pi^5 - 28\pi^2m^2K_{51}{x_0}^3 - 59\pi^3m^3K_{14}{x_0}^2 \\ -10\,\pi\,mK_{61}{x_0}^4 - 108\pi^4m^4K_{13}x_0 - 20\pi\,mK_{14}{x_0}^4 \\ -4\,K_{51}{x_0}^5 - 10\pi^3m^3K_{61}{x_0}^2 \\ -24\pi^4m^4K_{51}x_0 - 4\,K_{13}{x_0}^5 - 37\pi^2m^2K_{13}{x_0}^3 \end{array} \right)}{8{x_0}^3(\pi^2m^2+{x_0}^2)(9\pi^4m^4+40\pi^2m^2{x_0}^2+16{x_0}^4)}$$

$$u_7 = -\frac{4m^2\pi^3\sin(\gamma)\left(-1+\mathrm{e}^{3\,x_0}\right)u_7^1}{3(9\,{x_0}^2+4\,\pi^2m^2)(x_0{}^2+4\,\pi^2m^2)(9\,{x_0}^2+16\,\pi^2m^2)} - \frac{m^2\pi^3\sin(\gamma)\left(-1+\mathrm{e}^{4\,x_0}\right)u_7^2}{8(4\,{x_0}^2+9\,\pi^2m^2)(4\,{x_0}^2+\pi^2m^2)(x_0{}^2+\pi^2m^2)}$$

$$u_7^1 = \left( \begin{array}{l} 32b_8m^4\pi^4 + 72\pi^3m^3b_{12}x_0 - 16\pi^3m^3b_{14}x_0 + 44\pi^2m^2b_{10}{x_0}^2 \\ -9b_8{x_0}^4 - 9b_{10}{x_0}^4 + 36\pi\,mb_{14}{x_0}^3 + 18\pi\,mb_{12}{x_0}^3 - 28\pi^2m^2b_8{x_0}^2 \end{array} \right)$$

$$u_7^2 = \left( \begin{array}{l} -18b_{16}m^4\pi^4 + 9b_9m^4\pi^4 + 27\pi^3m^3b_{13}x_0 - 6\pi^3m^3b_{15}x_0 - 8b_{11}{x_0}^4 \\ -26\pi^2m^2b_{16}{x_0}^2 + 22\pi^2m^2b_{11}{x_0}^2 + 24\pi\,mb_{15}{x_0}^3 + 12\pi\,mb_{13}{x_0}^3 \\ -8b_{16}{x_0}^4 - 8b_9{x_0}^4 - 14\pi^2m^2b_9{x_0}^2 \end{array} \right)$$

$$u_8 = \frac{\pi^3 m^2 \sin(\gamma) \left( \begin{array}{l} 14\pi^2 m^2 b_{17} {x_0}^2 - 22\pi^2 m^2 b_{18} {x_0}^2 \\ +26\pi^2 m^2 b_{30} {x_0}^2 - 24\pi m b_{25} {x_0}^3 \\ -9\pi^4 m^4 b_{17} + 18\pi^4 m^4 b_{30} + 8 b_{18} {x_0}^4 \\ -12\pi m b_{24} {x_0}^3 + 8 b_{30} {x_0}^4 + 8 b_{17} {x_0}^4 \\ -27\pi^3 m^3 b_{24} x_0 + 6\pi^3 m^3 b_{25} x_0 \end{array} \right) \left(e^{4x_0} - 1\right)}{8\left(\pi^2 m^2 + {x_0}^2\right)\left(\pi^2 m^2 + 4{x_0}^2\right)\left(9\pi^2 m^2 + 4{x_0}^2\right)}$$

$$u_9 = \frac{\sin(\gamma)\, {S_1}^2 \pi^5 m^4 \left( \begin{array}{l} 12 e^{4x_0}\pi^4 m^4 + 16 e^{6x_0}\pi^4 m^4 - 28\pi^4 m^4 \\ +111 e^{4x_0}\pi^2 m^2 {x_0}^2 + 64 e^{6x_0} {x_0}^4 - 91 {x_0}^4 \\ -191\pi^2 m^2 {x_0}^2 + 27 e^{4x_0} {x_0}^4 + 80 e^{6x_0}\pi^2 m^2 {x_0}^2 \end{array} \right)}{48\left(\pi^2 m^2 + 9{x_0}^2\right)\left(\pi^2 m^2 + {x_0}^2\right)\left(\pi^2 m^2 + 4{x_0}^2\right){x_0}^2}$$

$$u_{10} = -\frac{\left( \begin{array}{l} 4\pi^2 c_{24} m^2 + 4\pi^2 b_{35} m^2 \\ -8\pi^2 K_{16} c_{21} m^2 + 6 b_{38} x_0 m\pi \\ +c_{24} {x_0}^2 - 2 b_{35} {x_0}^2 - 2 K_{16} c_{21} {x_0}^2 \end{array} \right) m^2\pi^3 \sin(\gamma)\left(1 - e^{2x_0}\right)}{4({x_0}^2 + m^2\pi^2)({x_0}^2 + 4m^2\pi^2)}$$
$$+ \left( \begin{array}{l} \frac{\left(\pi^2 b_{37} m^2 + 3 b_{40} x_0 m\pi - 2 b_{37} {x_0}^2\right)\left(1 - e^{4x_0}\right)}{8(4{x_0}^2 + m^2\pi^2)({x_0}^2 + m^2\pi^2)} \\ -\frac{4\left(8\pi^2 b_{36} m^2 + 18 b_{39} x_0 m\pi - 9 b_{36} {x_0}^2\right) e^{3x_0}}{3(9{x_0}^2 + 4m^2\pi^2)(9{x_0}^2 + 16m^2\pi^2)} \end{array} \right) m^2\pi^3 \sin(\gamma)$$

$$u_{11} = \frac{\pi^3 m^2 \sin(\gamma) \left( \begin{array}{l} \pi^2 m^2 b_{52} - 2\pi^2 m^2 b_{59} \\ +3 b_{56} x_0 m\pi - 2 b_{59} {x_0}^2 - 2 b_{52} {x_0}^2 \end{array} \right)\left(1 - e^{4x_0}\right)}{8(4{x_0}^2 + m^2\pi^2)({x_0}^2 + m^2\pi^2)}$$
$$+ \frac{4\pi^3 m^2 \sin(\gamma)\left(8 m^2\pi^2 b_{51} + 18 b_{55} x_0 m\pi - 9 b_{51} {x_0}^2\right)\left(1 - e^{3x_0}\right)}{3(9{x_0}^2 + 16m^2\pi^2)(9{x_0}^2 + 4m^2\pi^2)}$$

$$u_{12} = -\frac{16\pi^3 m^2 {S_1}^2\left(-1 + e^{5x_0}\right) u_{12}^1}{5 u_{12}^3} + \frac{\pi^3 m^2 {S_1}^3 \cos(\gamma)\left(25{x_0}^2 + 4m^2\pi^2\right) u_{12}^2}{4 u_{12}^3}$$
$$u_{12}^1 = \left(9{x_0}^2 + m^2\pi^2\right)\left(4{x_0}^2 + m^2\pi^2\right)(-c_{21} - 3c_{22} + 3c_{11} + 9c_{12})\sin(\gamma)$$
$$u_{12}^2 = \left(4\pi^2 e^{6x_0} m^2 + \pi^2 m^2 e^{4x_0} - 5m^2\pi^2 - 25{x_0}^2 + 9 e^{4x_0} {x_0}^2 + 16 e^{6x_0} {x_0}^2\right)$$
$$u_{12}^3 = \left(4\pi^6 m^6 + 77\pi^4 m^4 {x_0}^2 + 469 m^2\pi^2 {x_0}^4 + 900 {x_0}^6\right)$$

$$u_{13} = \frac{1}{12}\frac{m^2\pi^3\left(\mathrm{e}^{6x_0}-1\right)I_0{S_1}^4\sin(\gamma)}{\pi^2m^2+9{x_0}^2}, u_{14} = \frac{1}{2}\frac{{S_1}^4I_0\pi^5\sin(\gamma)\,m^4\left(\mathrm{e}^{6x_0}-1\right)}{\left(4\pi^2m^2+9{x_0}^2\right)\left(\pi^2m^2+9{x_0}^2\right)}$$

## A.3.

$$H_{21} = \frac{A_{22}B_{12}-A_{12}B_{22}+A_{12}D_{22}-A_{22}D_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$$

$$H_{22} = \frac{A_{11}B_{22}-A_{11}D_{22}-A_{12}B_{12}+2A_{12}D_{12}-A_{22}D_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} - \frac{2B_{66}}{A_{66}} + \frac{2D_{66}}{A_{66}}$$

$$H_{23} = E_{11} - G_{11} - \frac{(A_{11}B_{12}D_{12}-A_{11}D_{12}^2-A_{12}B_{11}D_{12}-A_{12}B_{12}D_{11})}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} + \frac{(2A_{12}D_{11}D_{12}+A_{22}B_{11}D_{11}-A_{22}D_{11}^2)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$$

$$H_{24} = -\frac{\left(A_{11}A_{22}C_{22}-2A_{11}A_{22}E_{22}+A_{11}A_{22}G_{22}-A_{11}B_{22}^2+2A_{11}B_{22}D_{22}\right)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} + \frac{\left(-A_{11}D_{22}^2-A_{12}^2C_{22}+2A_{12}^2E_{22}-A_{12}^2G_{22}+2A_{12}B_{12}B_{22}-2A_{12}B_{12}D_{22}\right)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} + \frac{\left(-2A_{12}B_{22}D_{12}+2A_{12}D_{12}D_{22}-A_{22}B_{12}^2+2A_{22}B_{12}D_{12}-A_{22}D_{12}^2\right)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$$

$$H_{25} = \frac{(A_{11}B_{12}B_{22}-A_{11}B_{12}D_{22}-2A_{11}B_{22}D_{12}+2A_{11}D_{12}D_{22}-A_{12}B_{11}B_{22})}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} + \frac{\left(A_{12}B_{11}D_{22}-A_{12}B_{12}^2+3A_{12}B_{12}D_{12}+2A_{12}B_{22}D_{11}-2A_{12}D_{11}D_{22}\right)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} - \frac{\left(2A_{12}D_{12}^2+A_{22}B_{11}B_{12}-A_{22}B_{11}D_{12}-2A_{22}B_{12}D_{11}+2A_{22}D_{11}D_{12}\right)}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} + 4\frac{(B_{66}-D_{66})^2}{A_{66}} - 4C_{66} - 4G_{66} + 3E_{12} + 8E_{66} - 2G_{12} - C_{12}$$

$$H_{26} = \frac{A_{11}D_{12}^2-2A_{12}D_{11}D_{12}+A_{22}D_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} - G_{11}$$

$$H_{27} = \frac{\left(A_{11}A_{22}E_{22} - A_{11}A_{22}G_{22} - A_{11}B_{22}D_{22} + A_{11}D_{22}^2 - A_{12}^2E_{22} + A_{12}^2G_{22}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} + \frac{\left(A_{12}B_{12}D_{22} + A_{12}B_{22}D_{12} - 2A_{12}D_{12}D_{22} - A_{22}B_{12}D_{12} + A_{22}D_{12}^2\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$

$$H_{29} = A_{44}+\mathrm{E}_{44}+2\mathrm{C}_{44}, H_{30} = E_{55} + C_{55}$$

$$H_{31} = -\frac{\left(A_{11}A_{22}E_{11} - A_{11}A_{22}G_{11} - A_{11}B_{12}D_{12} + A_{11}D_{12}^2 - A_{12}^2E_{11} + A_{12}^2G_{11}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} + \frac{\left(A_{12}B_{11}D_{12} + A_{12}B_{12}D_{11} - 2A_{12}D_{11}D_{12} - A_{22}B_{11}D_{11} + A_{22}D_{11}^2\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$

$$H_{32} = -\frac{\left(A_{11}A_{22}E_{22} - A_{11}A_{22}G_{22} - A_{11}B_{22}D_{22} + A_{11}D_{22}^2 - A_{12}^2E_{22} + A_{12}^2G_{22}\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} + \frac{\left(A_{12}B_{12}D_{22} + A_{12}B_{22}D_{12} - 2A_{12}D_{12}D_{22} - A_{22}B_{12}D_{12} + A_{22}D_{12}^2\right)}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$

$$\begin{aligned} H_{33} = &-\frac{2A_{11}A_{22}A_{66}E_{12} + 4A_{11}A_{22}A_{66}E_{66} - 2A_{11}A_{22}A_{66}G_{12} - 4A_{11}A_{22}A_{66}G_{66}}{A_{66}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \\ &- \frac{4A_{11}A_{22}D_{66}^2 - 4A_{11}A_{22}B_{66}D_{66} - A_{11}A_{66}B_{12}D_{22} - A_{11}A_{66}B_{22}D_{12}}{A_{66}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \\ &- \frac{2A_{11}A_{66}D_{12}D_{22} - 2A_{12}^2A_{66}E_{12} - 4A_{12}^2A_{66}E_{66} + 2A_{12}^2A_{66}G_{12} + 4A_{12}^2A_{66}G_{66}}{A_{66}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \\ &- \frac{4A_{12}^2B_{66}D_{66} - 4A_{12}^2D_{66}^2 + A_{12}A_{66}B_{11}D_{22} + 2A_{12}A_{66}B_{12}D_{12} + A_{12}A_{66}B_{22}D_{11}}{A_{66}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \\ &- \frac{2A_{12}A_{66}(D_{11}D_{22} - D_{12}^2) - A_{22}A_{66}B_{11}D_{12} - A_{22}A_{66}B_{12}D_{11} + 2A_{22}A_{66}D_{11}D_{12}}{A_{66}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \end{aligned}$$

$$H_{34} = \frac{A_{11}A_{22}G_{11} - A_{11}D_{12}^2 - A_{12}^2G_{11} + 2A_{12}D_{11}D_{12} - A_{22}D_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$

$$H_{35} = \frac{A_{11}A_{22}G_{22} - A_{11}D_{22}^2 - A_{12}^2G_{22} + 2A_{12}D_{11}D_{22} - A_{22}D_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$$

$$H_{36} = \frac{2\left(A_{11}A_{22}A_{66}(G_{12} + G_{66}) - 2A_{11}A_{22}D_{66}^2 - A_{11}A_{66}D_{12}D_{22} - A_{12}^2A_{66}G_{12}\right)}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)A_{66}} + \frac{2\left(-2A_{12}^2A_{66}G_{66} + 2A_{12}^2D_{66}^2 + A_{12}A_{66}(D_{11}D_{22} + D_{12}^2) - A_{22}A_{66}D_{11}D_{12}\right)}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)A_{66}}$$

$$H_{37} = -2C_{44} - E_{44} - A_{44}, H_{38} = -E_{55} - C_{55}$$

**SSSS**

$$G_1^1 = \frac{\left(F_{31}m^4\pi^4H_{17}b^4 + n^4\pi^4F_{31}H_{21}a^4 + F_{31}H_{22}m^2\pi^4n^2b^2a^2 + \pi^4H_{23}m^4b^4\right)}{4b^3a^3}$$
$$+ \frac{\left(n^4\pi^4H_{24}a^4 + n^2\pi^4H_{25}m^2b^2a^2 - \pi^2H_{29}m^2b^4a^2 - n^2\pi^2H_{30}b^2a^4\right)}{4b^3a^3}$$
$$- \frac{1}{4}baK_1 + \frac{\left(-\pi^2a^4b^2n^2 - \pi^2a^2b^4m^2\right)K_2}{4b^3a^3} - \frac{\pi^2F_{31}m^2b}{4aRy} - \frac{F_{31}n^2\pi^2a}{4bRx}$$

$$G_1^{11} = -\frac{m^2\pi^2b}{4a}, G_1^{12} = -\frac{n^2\pi^2a}{4b}$$

$$G_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{16F_{31}H_{11}H_{12}\pi^2m^2n^2 - 4H_{11}H_{21}\pi^2m^2n^2 - 4H_{12}H_{17}\pi^2m^2n^2}{baH_{11}H_{12}nm}\right)$$

$$+\frac{1}{6}\frac{a_n}{bH_{11}mRy} + \frac{1}{6}\frac{b_m}{aH_{12}nRx}$$

$$G_1^3 = -\frac{1}{64}\frac{\pi^4\left(H_{11}b^4m^4 + H_{12}a^4n^4\right)}{b^3a^3H_{11}H_{12}}, G_1^5 = \frac{8}{3}\frac{F_{32}mn\pi^2}{ab}, G_1^6 = \frac{4ab}{mn\pi^2}$$

$$\overline{J_1^1} = \frac{\left(I_0I_2\pi^2(a^2n^2 + b^2m^2 - 2a^2n^2 - 2b^2m^2) + I_0J_3\pi^2(a^2n^2 + b^2m^2)\right)}{4baI_0}$$
$$+ \frac{\left(-I_1^2\pi^2(a^2n^2 + b^2m^2) + 2I_1J_1\pi^2(a^2n^2 + b^2m^2) - J_1^2\pi^2(a^2n^2 - b^2m^2) + I_0^2b^2a^2\right)}{4baI_0}$$

$$G_2^1 = -\frac{\pi^2\left(F_{31}\pi^2(H_{17}b^4m^4 + H_{18}a^4n^4 + H_{19}a^2b^2m^2n^2 - b^4m^4)\right)}{4a^3b^3}$$
$$- \frac{\pi^2\left(H_{32}\pi^2a^4n^4 - H_{33}\pi^2a^2b^2m^2n^2 + H_{37}m^2b^4a^2 + n^2H_{38}b^2a^4\right)}{4a^3b^3}$$

$$G_2^2 = \frac{2}{3}\frac{\pi^2mn\left(H_{11}H_{18} + H_{12}H_{17}\right)}{abH_{12}H_{11}}$$

$$G_2^3 = -\frac{\pi^2\left(F_{32}\pi^2\left(H_{17}b^4m^4 + H_{18}a^4n^4 + H_{19}a^2b^2m^2n^2\right) - H_{34}\pi^2b^4m^4\right)}{4a^3b^3}$$
$$- \frac{\pi^2\left(H_{35}\pi^2a^4n^4 - H_{36}\pi^2a^2b^2m^2n^2 + H_{37}a^2b^4m^2 + H_{38}a^4b^2n^2\right)}{4a^3b^3}$$

$$\overline{J_2^1} = \frac{\pi^2\left(I_0 J_2(a^2n^2+b^2m^2) - I_0 J_3(a^2n^2b^2m^2)\right)}{4abI_0} + \frac{\pi^2\left(-I_1 J_1(a^2n^2+b^2m^2) + J_1^2(a^2n^2+b^2m^2)\right)}{4abI_0}$$

$$\overline{J_2^2} = \frac{\pi^2\left(-I_0 J_3 a^2n^2 - I_0 J_3 b^2m^2 + J_1^2 a^2n^2 + J_1^2 b^2m^2\right)}{4abI_0}$$

**CCCC**

$$G_1^1 = -\frac{\left(\begin{array}{l} -64\pi^4 H_{17} m^4 F_{51} b^4 + 128 n^4 \pi^4 H_{21} F_{21} a^4 - 16 n^2 \pi^4 H_{25} m^2 a^2 b^2 \\ -48 n^4 \pi^4 H_{24} a^4 - 48\pi^4 H_{23} m^4 b^4 + 12 n^2 \pi^2 H_{30} a^4 b^2 + 128\pi^4 H_{17} m^4 F_{11} b^4 \\ +12\pi^2 H_{29} m^2 a^2 b^4 - 64 n^2 \pi^4 H_{22} m^2 F_{51} a^2 b^2 - 64 n^4 \pi^4 H_{21} F_{51} a^4 \end{array}\right)}{64 b^3 a^3}$$
$$-\frac{9}{64}abK_1 - \frac{\left(12\pi^2 a^4 b^2 n^2 + 12\pi^2 a^2 b^4 m^2\right)K_2}{64 b^3 a^3} - \frac{\left(-32\pi^2 F_{11} m^2 a^2 b^4 + 16\pi^2 F_{51} m^2 a^2 b^4\right)}{64 b^3 a^3 R_y}$$
$$-\frac{\left(-32 F_{21}\pi^2 a^4 b^2 n^2 + 16 F_{51}\pi^2 a^4 b^2 n^2\right)}{64 b^3 a^3 R_x}, G_1^{11} = -\frac{3m^2\pi^2 b}{16a}, G_1^{12} - \frac{3n^2\pi^2 a}{16b}$$

$$G_1^2 = -\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} 8F_{12} H_{17}\pi^2 b^4 m^4 + 8F_{22} H_{21}\pi^2 a^4 n^4 - 4F_{52} H_{17}\pi^2 b^4 m^4 \\ -4F_{52} H_{21}\pi^2 a^4 n^4 - 4F_{52} H_{22}\pi^2 a^2 b^2 m^2 n^2 \\ +2F_{11}\pi^2 a^2 b^2 m^2 n^2 + 2F_{21}\pi^2 a^2 b^2 m^2 n^2 - 2F_{51}\pi^2 a^2 b^2 m^2 n^2 \end{array}\right)}{4 b^3 a^3}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\pi^2\left(-2F_{12} m^2 a^2 b^4 + F_{52} m^2 a^2 b^4\right)}{b^3 a^3 R_y} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2\left(-2F_{22} a^4 b^2 n^2 + F_{52} a^4 b^2 n^2\right)}{b^3 a^3 R_x}$$

$$G_1^3 = -\frac{1}{4}\frac{n^2\pi^4 m^2\left(F_{61} + F_{71} - 2F_{41} - 2F_{31} + 2F_{22} + 2F_{12} - 2F_{52}\right)}{ab}$$

$$G_1^4 = \pi^2\frac{\left(\begin{array}{l} 16 n^2\pi^2 H_{22} m^2 F_{53} a^2 b^2 + 12\pi^2 H_{26} m^4 b^4 + 4 n^2\pi^2 H_{28} m^2 a^2 b^2 \\ +16 n^4\pi^2 H_{21} F_{53} a^4 - 3 n^2 H_{30} a^4 b^2 + 16\pi^2 H_{17} m^4 F_{53} b^4 \\ -3 H_{29} m^2 a^2 b^4 + 12 n^4\pi^2 H_{27} a^4 - 8\pi^2\left(H_{21} H_{18} n^4 a^4 - H_{17}^2 m^4 b^4\right) \end{array}\right)}{16 b^3 a^3}$$
$$+\frac{\pi^2 b\left(-4F_{53} m^2 H_{11} + 2H_{17} m^2\right)}{16 a H_{11} R_y} + \frac{\pi^2 a\left(-4F_{53} H_{12} n^2 + 2H_{18} n^2\right)}{16 b H_{12} R_x}$$

$$G_1^5 = \frac{1}{8}\frac{n^2\pi^4 m^2\left(4F_{53} H_{11} H_{12} - H_{18} H_{11} - H_{17} H_{12}\right)}{ab H_{11} H_{12}}, G_1^6 = \frac{ab}{4}$$

$$G_2^1 = \frac{1}{16}\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} -3H_{37}m^2a^2b^4 + 12\pi^2H_{31}m^4b^4 + 12H_{32}n^4\pi^2a^4 - 3H_{38}n^2a^4b^2 \\ +32\pi^2H_{17}m^4F_{11}b^4 + 32F_{21}H_{18}n^4\pi^2a^4 - 16n^4\pi^2H_{18}F_{51}a^4 \\ -16n^2\pi^2H_{19}m^2F_{51}a^2b^2 - 16\pi^2H_{17}m^4F_{51}b^4 + 4n^2\pi^2H_{33}m^2a^2b^2 \end{array}\right)}{b^3a^3}$$

$$G_2^2 = \frac{\pi^4\left(\begin{array}{l} 2F_{12}H_{17}b^4m^4 + 2F_{22}H_{18}a^4n^4 - F_{52}H_{17}b^4m^4 \\ -F_{52}H_{18}a^4n^4 - F_{52}H_{19}a^2b^2m^2n^2 \end{array}\right)}{b^3a^3}$$

$$G_2^3 = -\frac{1}{16}\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} -12H_{11}H_{12}H_{35}n^4\pi^2a^4 + 3H_{12}H_{37}m^2H_{11}a^2b^4 - 12H_{12}\pi^2H_{34}m^4H_{11}b^4 \\ +3H_{11}H_{12}H_{38}n^2a^4b^2 + 16H_{12}n^4\pi^2H_{18}F_{53}H_{11}a^4 - 8H_{12}\pi^2H_{17}^2m^4b^4 \\ -8H_{11}H_{18}^2n^4\pi^2a^4 + 16H_{12}n^2\pi^2H_{19}m^2F_{53}H_{11}a^2b^2 \\ +16H_{12}\pi^2H_{17}m^4F_{53}H11b^4 - 4H_{12}n^2\pi^2H_{36}m^2H_{11}a^2b^2 \end{array}\right)}{b^3a^3H_{12}H_{11}}$$

$$\overline{J_1^1} = \frac{3}{64}\frac{\left(\begin{array}{l} 4I_0I_2\pi^2a^2n^2 + 4I_0I_2\pi^2b^2m^2 - 8I_0J_2\pi^2a^2n^2 - 8I_0J_2\pi^2b^2m^2 \\ +4I_0J_3\pi^2a^2n^2 + 4I_0J_3\pi^2b^2m^2 - 4I_1^2\pi^2a^2n^2 - 4I_1^2\pi^2b^2m^2 \\ +8I_1J_1\pi^2a^2n^2 + 8I_1J_1\pi^2b^2m^2 - 4J_1^2\pi^2a^2n^2 - 4J_1^2\pi^2b^2m^2 + 3I_0^2a^2b^2 \end{array}\right)}{baI_0}$$

$$\overline{J_1^2} = -\frac{3}{16}\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} I_0J_2a^2n^2 + I_0J_2b^2m^2 - I_0J_3a^2n^2 - I_0J_3b^2m^2 \\ -I_1J_1a^2n^2 - I_1J_1b^2m^2 + J_1^2a^2n^2 + J_1^2b^2m^2 \end{array}\right)}{baI_0}$$

**CSCS**

$$G_1^1 = -\frac{\left(\begin{array}{l} 4F_{11}H_{21}\pi^4a^4n^4 - 32F_{51}H_{17}\pi^4b^4m^4 - 2F_{51}H_{21}\pi^4a^4n^4 \\ -8F_{51}H_{22}\pi^4a^2b^2m^2n^2 + 16H_{23}\pi^4b^4m^4 + 3H_{24}\pi^4a^4n^4 \\ +4H_{25}\pi^4a^2b^2m^2n^2 - 4H_{29}\pi^2a^2b^4m^2 - 3H_{30}\pi^2a^4b^2n^2 \end{array}\right)}{16b^3a^3} - \frac{3}{16}abK_1$$
$$-\frac{\left(3\pi^2a^4b^2n^2+4\pi^2a^2b^4m^2\right)K_2}{16b^3a^3} + \frac{F_{51}m^2\pi^2b}{2aR_y} + \frac{\left(-4F_{11}\pi^2a^4b^2n^2+2F_{51}\pi^2a^4b^2n^2\right)}{16b^3a^3R_x},$$
$$G_1^{11} = -\frac{m^2\pi^2b}{4a}, G_1^{12} = -\frac{3n^2\pi^2a}{16b}$$

$$G_1^2 = \frac{2\pi\left(\begin{array}{l} -12F_{21}H_{17}\pi^2b^4m^4 - 8F_{31}H_{21}\pi^2a^4n^4 + 4F_{61}\pi^2(H_{17}b^4m^4 + H_{21}a^4n^4) \\ +4F_{61}H22\pi^2a^2b^2m^2n^2 + F_{11}\pi^2a^2b^2m^2n^2 - 2F_{51}\pi^2a^2b^2m^2n^2 \end{array}\right)}{3nb^3a^3}$$
$$+\frac{2}{3}\frac{\pi\left(3F_{21}m^2a^2b^4-F_{61}m^2a^2b^4\right)}{b^3a^3nR_y} + \frac{2}{3}\frac{\pi\left(2F_{31}a^4b^2n^2-F_{61}a^4b^2n^2\right)}{b^3a^3nR_x}$$

$$G_1^3 = -\frac{1}{4}\frac{m^2n^2\pi^4\left(2F_{21} + 2F_{31} - 2F_{41} - F_{61}\right)}{ab}$$

$$G_1^4 = \frac{\pi^2}{16}\frac{\left(\begin{array}{l} 4F_{12}H_{21}\pi^2a^4n^4 - 32F_{53}H_{17}\pi^2b^4m^4 - 2F_{53}H_{21}\pi^2a^4n^4 \\ -8F_{53}H_{22}\pi^2a^2b^2m^2n^2 + 16H_{26}\pi^2b^4m^4 + 3H_{27}\pi^2a^4n^4 \\ +4H_{28}\pi^2a^2b^2m^2n^2 - 4H_{29}m^2b^4a^2 - 3H_{30}n^2b^2a^4 \end{array}\right)}{b^3a^3} + \frac{\left(\pi^2m^2F_{53}b\right)}{2aR_y}$$
$$+\frac{\pi^2\left(-4F_{12}a^4b^2n^2+2F_{53}a^4b^2n^2\right)}{16b^3a^3R_x}$$

$$G_1^5 = \frac{2}{3}\frac{n\pi^3m^2\left(F_{12} - 2F_{52}\right)}{ab}, G_1^6 = \frac{ab}{n\pi}$$

$$\overline{J_1^1} = \frac{1}{16}\frac{\left(\begin{array}{l} 3I_0I_2\pi^2a^2n^2 + 4I_0I_2\pi^2b^2m^2 - 6I_0J_2\pi^2a^2n^2 - 8I_0J_2\pi^2b^2m^2 \\ +3I_0J_3\pi^2a^2n^2 + 4I_0J_3\pi^2b^2m^2 - 3{I_1}^2\pi^2a^2n^2 - 4{I_1}^2\pi^2b^2m^2 \\ +6I_1J_1\pi^2a^2n^2 + 8I_1J_1\pi^2b^2m^2 - 3{J_1}^2\pi^2a^2n^2 - 4{J_1}^2\pi^2b^2m^2 + 3{I_0}^2a^2b^2 \end{array}\right)}{baI_0}$$

$$\overline{J_1^2} = -\frac{1}{16}\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} 3I_0J_2a^2n^2 + 4I_0J_2b^2m^2 - 3I_0J_3a^2n^2 - 4I_0J_3b^2m^2 \\ -3I_1J_1a^2n^2 - 4I_1J_1b^2m^2 + 3{J_1}^2a^2n^2 + 4{J_1}^2b^2m^2 \end{array}\right)}{baI_0}$$

$$G_2^1 = -\frac{1}{16}\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} 4F_{11}H_{18}\pi^2a^4n^4 - 32F_{51}H_{17}\pi^2b^4m^4 - 2F_{51}H_{18}\pi^2a^4n^4 \\ -8F_{51}H_{19}\pi^2a^2b^2m^2n^2 - 16H_{31}\pi^2b^4m^4 - 3H_{32}\pi^2a^4n^4 \\ -4H_{33}\pi^2a^2b^2m^2n^2 + 4H_{37}a^2b^4m^2 + 3H_{38}a^4b^2n^2 \end{array}\right)}{b^3a^3}$$

$$G_2^2 = \frac{8}{3}\frac{\pi^3\left(\begin{array}{l} 3F_{21}H_{17}b^4m^4 + 2F_{31}H_{18}a^4n^4 - F_{61}H_{17}b^4m^4 \\ -F_{61}H_{18}a^4n^4 - F_{61}H_{19}a^2b^2m^2n^2 \end{array}\right)}{b^3a^3n}$$

$$G_2^3 = -\frac{1}{16}\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} 4F_{12}H_{18}\pi^2a^4n^4 - 32F_{52}H_{17}\pi^2b^4m^4 - 2F_{52}H_{18}\pi^2a^4n^4 \\ -8F_{52}H_{19}\pi^2a^2b^2m^2n^2 - 16H_{34}\pi^2b^4m^4 - 3H_{35}\pi^2a^4n^4 \\ -4H_{36}\pi^2a^2b^2m^2n^2 + 4H_{37}a^2b^4m^2 + 3H_{38}a^4b^2n^2 \end{array}\right)}{b^3a^3}$$

$$\overline{J_2^1} = \frac{1}{16}\frac{\pi^2\left(\begin{array}{l} 3I_0J_2a^2n^2 + 4I_0J_2b^2m^2 - 3I_0J_3a^2n^2 - 4I_0J_3b^2m^2 \\ -3I_1J_1a^2n^2 - 4I_1J_1b^2m^2 + 3{J_1}^2a^2n^2 + 4{J_1}^2b^2m^2 \end{array}\right)}{baI_0}$$

$$\overline{J_2^2} = -\frac{1}{16}\frac{\pi^2\left(3I_0J_3a^2n^2 + 4I_0J_3b^2m^2 - 3{J_1}^2a^2n^2 - 4{J_1}^2b^2m^2\right)}{b^2a^2I_0}$$